1. MECÁNICA GENERAL

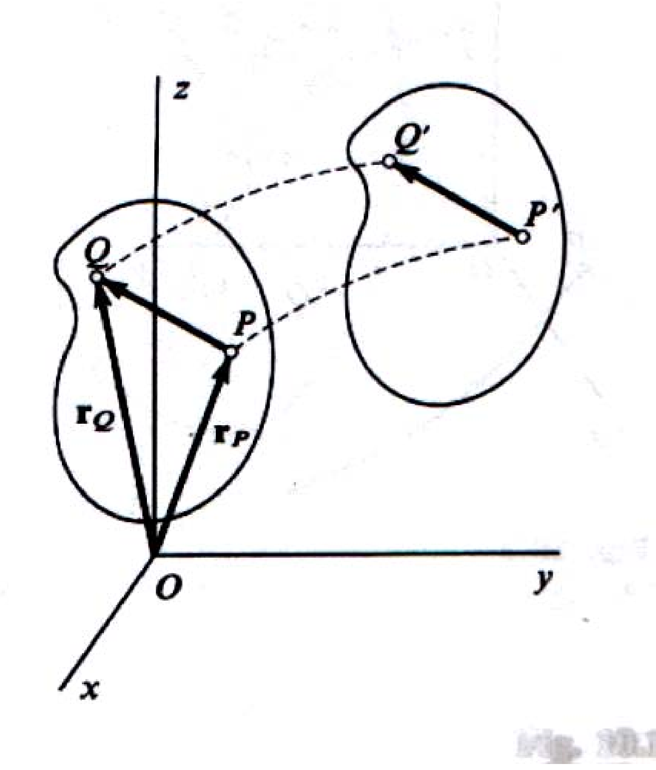
1.3. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Se define ***sólido rígido*** como un sistema de puntos materiales cuyas distancias son invariables. Cuando un cuerpo rígido está en movimiento respecto a un sistema de referencia, puntos cualesquiera *P, Q,, R* ....del cuerpo describen sus correspondientes trayectorias con sus correspondientes velocidades y aceleraciones. Sin embargo, las distancias mutuas *PQ, QR, PR...* han de permanecer invariables ***(condición de rigidez).***

Comenzaremos estudiando los movimientos más elementales del sólido rígido como la ***traslación*** y la ***rotación alrededor de un eje fijo***, y posteriormente el movimiento más general del sólido ya que todo movimiento de un sólido por complejo que sea, se reduce a estos dos movimientos más simples.

1.3.1. Traslación

Un sólido rígido experimenta un movimiento de traslación cuando cualquier recta PQ que une dos puntos cualesquier del cuerpo mantiene su dirección durante el movimiento.



Sean $\vec{r}_P$ y $\vec{r}_Q$ los vectores de posición de los puntos P y Q tal y como se indica en la figura, entre ambos vectores se puede escribir la siguiente relación:

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

Durante la traslación el módulo del vector $\vec{PQ}$ permanece constante debido a la condición de rigidez del sólido y su dirección también permanece constante por las características del movimiento de traslación que el sólido está efectuando. Debido a estas propiedades al derivar respecto al tiempo la expresión anterior que relaciona los vectores de posición de los puntos P y Q obtenemos:

$$\frac{d\vec{r}_Q}{dt} = \frac{d\vec{PQ}}{dt} + \frac{d\vec{r}_P}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_Q}{dt} = \frac{d\vec{r}_P}{dt} \Rightarrow \vec{v}_Q = \vec{v}_P$$

Y derivando de nuevo:

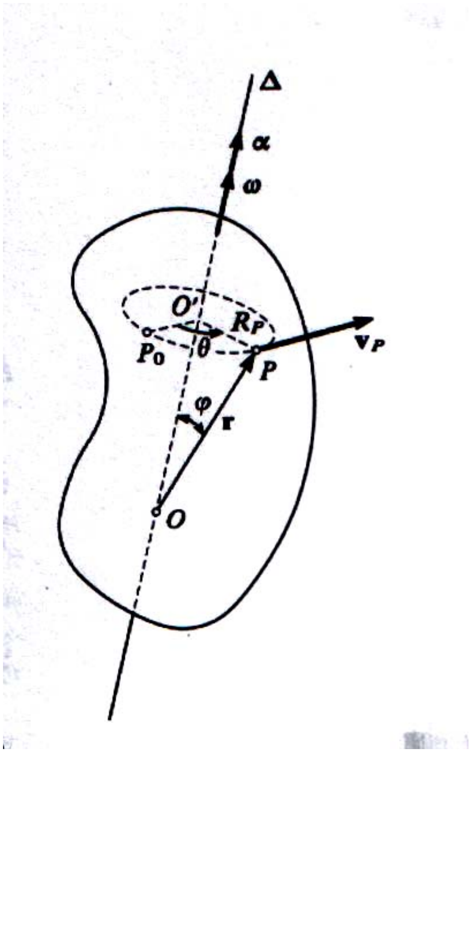
$$\frac{d\vec{a}_Q}{dt} = \frac{d\vec{a}_P}{dt} \Rightarrow \vec{a}_Q = \vec{a}_P$$

En resumen*, durante la traslación todos los puntos del cuerpo rígido recorren trayectorias idénticas con la misma velocidad y la misma aceleración.*

Las trayectorias descritas por los puntos de un sólido rígido durante su traslación, en general serán ***curvilíneas*** ya que en cada instante la velocidad suele cambiar su dirección y módulo. En el caso particular de que los vectores velocidad sean invariables en el tiempo, el movimiento del sólido será una ***traslación uniforme*** y la trayectoria de cada uno de sus puntos será una trayectoria ***rectilínea.***

1.3.2. Rotación alrededor de un eje fijo

Consideremos un sólido rígido y pensemos en el tipo de movimiento que describiría dicho sólido si los puntos situados sobre un eje estuviesen obligados a permanecer fijos. Durante el movimiento el sólido rígido únicamente puede girar alrededor de dicho eje que se denomina ***eje de rotación.*** Cada punto P del cuerpo rígido no perteneciente al eje describirá una circunferencia situada en un plano normal al eje, esto es, un movimiento circular.



Nota: *aunque en la figura el vector de posición del punto P se denota solo por* $\vec{r}$ *en el desarrollo que se hace a continuación se expresa como* $\vec{r}_P$ *para indicar claramente que es el vector de posición en ese instante correspondiente al punto P del sólido rígido.*

Los parámetros que describen el movimiento del un punto cualquier *P* del sólido en un movimiento de rotación son su velocidad y aceleración lineal y su velocidad y aceleración angular. Según la figura estos parámetros vendrán definidos por las siguientes expresiones:

- ***Velocidad lineal:*** se calcula en cada instante como la derivada temporal del vector de posición de cada punto *P* del sólido rígido, $\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt}$ y viene representada por un vector fijo o ligado tangente en *P* a la trayectoria.

- ***Velocidad angular:*** según las propiedades del movimiento circular, el módulo de la velocidad angular se escribe como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ y es la misma para todos los puntos del sólido rígido por esta razón no ponemos el subíndice para indicar el punto al que le asociamos esta magnitud como si hacemos con la velocidad lineal. En realidad la velocidad angular es un vector perpendicular al plano de la trayectoria descrita por cada punto del sólido rígido, esto es $\vec{\omega}$ está sobre el eje de rotación, su módulo es $\frac{d\theta}{dt}$ y su sentido el del avance de un tornillo que girase en el mismo sentido en el que lo hace el sólido rígido. Dado que $\vec{\omega}$ es el mismo para todos los puntos del sólido rígido, esto es mantiene sus propiedades independientemente del punto del eje de rotación (que sería su recta de acción o recta soporte) sobre el que lo apliquemos este vector es un vector deslizante.

Por el movimiento circular sabemos que los módulos de las velocidades lineal y angular en un punto están relacionados mediante la expresión:

$$v_p = \omega \cdot R_P$$

y según la figura $R_P = r_P \cdot sen\varphi$ por lo que podemos escribir $v_p = \omega \cdot R_P = \omega \cdot r_P \cdot sen\varphi$ expresión que recuerda la del producto vectorial. Sin más que observar de nuevo la figura, se deduce que el módulo, la dirección y sentido de la velocidad lineal en el un punto P del sólido puede escribirse como el siguiente producto vectorial:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

- ***Aceleración angular:*** es también un vector deslizante (de igual módulo, dirección y sentido en cada instante para todos los puntos del sólido) de igual dirección y sentido que $\vec{\omega}$ y que se calcula mediante la expresión $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

- ***Aceleración lineal:*** es un vector fijo cuya expresión se deduce de la derivada temporal de la velocidad lineal. Teniendo en cuenta la relación que liga la velocidad lineal y angular para cada punto del sólido, la aceleración lineal puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}_P)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_P + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_P + \vec{\omega}\times\vec{v}_P = \vec{\alpha}\times\vec{r}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_P)$$

El primer término de dicha expresión resulta ser un vector tangente a la trayectoria en el punto *P* y representa la ***componente tangencial de la aceleración*** o ***aceleración tangencial:***

$$\vec{a}_P^{\,t} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_P$$

cuyo módulo es $a_P^t = \alpha \cdot r_P \cdot sen\varphi = R_P \cdot \alpha$.

El segundo término representa un vector dirigido hacia el centro de la circunferencia que describe el punto *P* y es la ***componente normal de la aceleración*** o ***aceleración normal:***

$$\vec{a}_P^{\,n} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_P)$$

cuyo módulo es $a_P^n = \omega^2 \cdot r \cdot sen\varphi = R_P \cdot \omega^2$.

1.3.3. Movimiento general de un sólido rígido

Cuando se estudia el movimiento de rotación del sólido rígido hemos establecido la relación $\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_P$ entre los vectores velocidad lineal y velocidad angular de un punto *P* cualquiera del sólido. Si se observa la figura utilizada para describir la rotación del sólido se deduce que se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_P = \vec{\omega}\times\vec{OP} = \vec{PO}\times\vec{\omega} = (\vec{PO'}+\vec{O'O})\times\vec{\omega} = \vec{PO'}\times\vec{\omega} = \vec{\omega}\times\vec{O'P}$$

de donde se deduce que $\vec{v}_P$ es independiente del punto de aplicación de $\vec{\omega}$ sobre el eje de rotación, lógico si se trata de un vector deslizante. En el estudio de los vectores deslizantes vimos que el momento $\vec{M}_P(\vec{a})$ respecto a un punto *P* cualquiera era independiente del punto de aplicación del vector deslizante $\vec{a}$. En este sentido, cuando el vector deslizante se trata de la velocidad angular, el vector ligado $\vec{v}_P$ es equivalente al vector ligado $\vec{M}_P(\vec{a})$. Parece entonces establecer un paralelismo entre el campo de momentos de un vector deslizante $\vec{a}$ cualquiera y el campo de velocidades del vector deslizante $\vec{\omega}$ **.**

En el caso más general un sólido rígido puede realizar cualquier movimiento con la única limitación de que la distancia entre dos puntos *P* y *Q* cualesquiera se mantenga constante durante el mismo. Como consecuencia del cumplimiento de la ***condición de rigidez*** se deduce una propiedad fundamental que nos va a permitir establecer de forma definitiva el paralelismo entre el campo de velocidades del sólido rígido y el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes previamente estudiado.

Matemáticamente, la condición de rigidez entre dos puntos P y Q del sólido rígido se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d\left|\vec{PQ}\right|}{dt}=0\Rightarrow\frac{d\left|\vec{PQ}\right|^2}{dt}=0$$

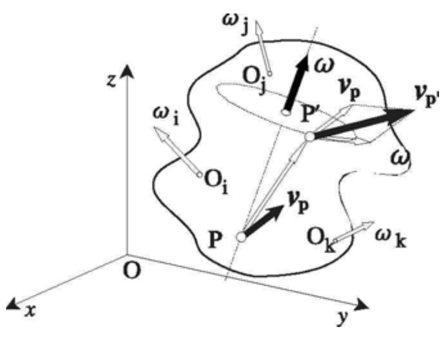
Desarrollando esta derivada:

$$\frac{d\left|\vec{PQ}\right|^2}{dt}=\frac{d(\vec{PQ}\cdot\vec{PQ})}{dt}=2\vec{PQ}\cdot\frac{d(\vec{PQ})}{dt}=2\vec{PQ}\cdot\left(\frac{d\vec{r}_Q}{dt}-\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)=2\vec{PQ}\cdot\left(\vec{v}_Q-\vec{v}_P\right)=2\cdot\left(\vec{PQ}\cdot\vec{v}_Q-\vec{PQ}\cdot\vec{v}_P\right)=0$$

$$\Rightarrow\vec{PQ}\cdot\vec{v}_Q=\vec{PQ}\cdot\vec{v}_P\Rightarrow\frac{\vec{PQ}}{\left|\vec{PQ}\right|}\cdot\vec{v}_Q=\frac{\vec{PQ}}{\left|\vec{PQ}\right|}\cdot\vec{v}_P\Rightarrow\vec{u}_{PQ}\cdot\vec{v}_Q=\vec{u}_{PQ}\cdot\vec{v}_P$$

obtenemos una expresión que nos indica que la proyección de las velocidades de dos puntos P y Q sobre la recta que definen dichos puntos son iguales. Esto ocurrirá en cada momento para todas y cada una de las parejas de puntos, por lo que es posible concluir que en el campo de velocidades del sólido se cumple que ***la proyección de las velocidades de dos puntos cualesquiera sobre la recta que les une es una constante.*** Esta misma propiedad era verificada por el campo de momentos (la proyección del momento resultante sobre un eje es independiente del punto del eje que se elija para calcular el momento $\vec{u}_{EJE}\cdot\vec{M}_P=\vec{u}_{EJE}\cdot\vec{M}_{P'}$) de manera que es posible establecer una analogía entre el campo de velocidades de un sólido rígido y el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes: cuando el vector deslizante es una velocidad angular el vector momento resultante es ahora lo que llamamos velocidad en un punto de un sólido rígido, $\vec{M}_P\equiv\vec{v}_P$ y ambos son vectores ligados al punto *P*.

Nos queda ahora identificar cual es la resultante de nuestro sistema de vectores deslizantes. Cuando se estudiaron de manera general los sistemas de vectores deslizantes la resultante $\vec{R}$ era un vector libre cuyas componentes se obtenían como la suma de los vectores deslizantes del sistema. En el caos del sólido rígido, en un instante dado una rotación del sólido puede venir descrita por varios vectores velocidad angular $\vec{\omega}_i$ alrededor de distintos ejes, el conjunto de todas las posibles velocidades angulares $\vec{\omega}_i$ constituye el sistema de vectores deslizantes y por tanto $\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\omega}_i$ y en este caso la resultante se denota por $\vec{R}=\vec{\omega}$. Si el movimiento del sólido rígido viene descrito por un solo vector velocidad angular el sistema de vectores deslizantes está constituido por un único vector y directamente tenemos que $\vec{R}=\vec{\omega}$.



Establecido este paralelismo, la ecuación que relaciona las velocidades en dos puntos cualesquiera de un sólido rígido será análoga a la ecuación que nos permitía conocido el momento resultante en un punto establecer su valor en cualquier punto del espacio:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + Q\vec{P} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{v}_Q = \vec{v}_P + Q\vec{P} \times \vec{\omega} = \vec{v}_P - \vec{\omega} \times Q\vec{P} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times P\vec{Q}$$

Esto nos permite, por tanto, describir de una manera sencilla el movimiento más general de un sólido rígido. Basta tomar un punto, por ejemplo *P*, del mismo cuya velocidad $\vec{v}_P$ sea conocida en dicho instante y referir a él todas las velocidades del sólido, obteniendo entonces la velocidad de un punto cualquiera Q mediante la expresión:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times P\vec{Q}$$

De dicha relación matemática se deduce que la velocidad de un punto cualquiera *Q* del cuerpo rígido es la suma de la velocidad de traslación de un punto cualquiera *P* y de una velocidad de rotación alrededor de un eje que pasa por *P*. Al tomar otro punto de referencia cualquiera la velocidad $\vec{v}_P$ será distinta, pero $\vec{\omega}$ será independiente del punto considerado lo que puede inferirse de su calidad de vector libre como resultante de un sistema de vectores deslizantes.

En consecuencia, el movimiento general de un sólido puede considerarse como la composición de un movimiento de traslación, que depende del punto elegido como referencia y uno de rotación en torno a dicho punto, con igual velocidad angular para cualquier punto del sólido escogido.

Al derivar temporalmente la expresión de la velocidad, obtenemos también para ese instante la expresión de la aceleración para cualquier punto del sólido rígido:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times P\vec{Q} \Rightarrow \vec{a}_Q = \frac{d\vec{v}_P}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times P\vec{Q} + \vec{\omega} \times \frac{dP\vec{Q}}{dt} = \vec{a}_P + \vec{\alpha} \times P\vec{Q} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times P\vec{Q}\right)$$

El paralelismo establecido entre el campo de velocidades de un sólido rígido y el campo de momentos nos permite seguir deduciendo propiedades importantes del campo de velocidades de un sólido rígido que nos va a facilitar enormemente su cálculo:

1) la cantidad resultante del producto escalar $\vec{v}_P \bullet \vec{\omega}$ va a ser un invariante equivalente al llamado automomento $\vec{M}_P \bullet \vec{R}$ o invariante escalar del campo de momentos
2) existirá un eje ε equivalente al eje central del campo de momentos tal que los puntos contenidos en este eje se caracterizarán por moverse con la ***velocidad mínima***. Esta velocidad mínima al igual que el vector resultante $\vec{\omega}$ serán vectores paralelos a dicho eje ε que en este caso se le denomina ***eje instantáneo de rotación y deslizamiento***

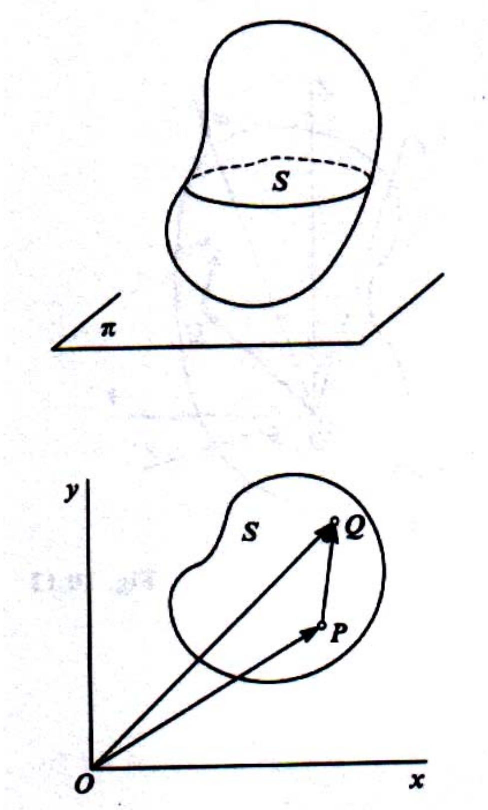
Si para obtener la velocidad de cualquier punto de un sólido rígido en un instante dado conocemos la velocidad de un punto *O* perteneciente al eje ε (instantáneo de rotación y deslizamiento), la velocidad de un punto *Q* cualquiera del sólido será la suma de una traslación paralela al eje ε y de módulo igual a la velocidad mínima y de una rotación alrededor del mismo:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OQ}$$

A este movimiento de rotación y traslación se le denomina ***movimiento helicoidal.*** Conviene recordar que estas expresiones nos permiten obtener el campo de velocidades del sólido en un instante dado, en este sentido en cada instante cambia también la posición y orientación del eje ε .

1.3.4. Movimiento plano

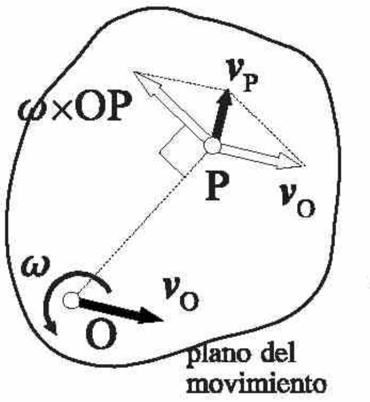
Un sólido rígido realiza un ***movimiento plano*** cuando las trayectorias de sus puntos y sus velocidades son en todo instante paralelas a un plano fijo π tal y como se indica en la figura. En este caso particular, la posición del sólido y el movimiento que describe en cada instante estará determinado estudiando simplemente una sección del sólido por un plano paralelo al plano π considerado (ver figura) Por tanto, se puede concluir que ***el estudio del movimiento plano de un cuerpo rígido se reduce a analizar el movimiento de una figura plana en su plano.***



Supongamos la sección plana escogida como representativa del sólido y situada en el plano coordenado *XY*. La relación entre las velocidades de dos puntos *P* y *Q* del sólido rígido contenidos en dicha sección plana vendrá dada por la expresión ya deducida anteriormente:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PQ}$$

Por las características del movimiento, los vectores $\vec{v}_Q$, $\vec{v}_P$ y $\vec{PQ}$ están contenidos en el mismo plano *XY* y por tanto el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ será perpendicular a dicho plano ya que el producto $\vec{\omega}\times\vec{PQ}$ debe ser un vector contenido en el plano *XY*. Al ser $\vec{v}_Q$ y $\vec{\omega}$ vectores perpendiculares cualquiera que sea el punto *Q* del sólido, el invariante $\vec{v}_Q \bullet \vec{\omega}$ es nulo.



Si el invariante $\vec{v}_Q \bullet \vec{\omega}$ es nulo, se deducen dos cosas:

1) la velocidad mínima en el campo de velocidades de un sólido con movimiento plano será cero
2) el eje instantáneo de rotación y deslizamiento, que debe ser paralelo al vector $\vec{\omega}$, será perpendicular al plano del movimiento e intersectará con él en un punto *P* cuya velocidad es la velocidad mínima, esto es cero. También en este caso el eje instantáneo de rotación y deslizamiento será simplemente eje instantáneo de rotación.

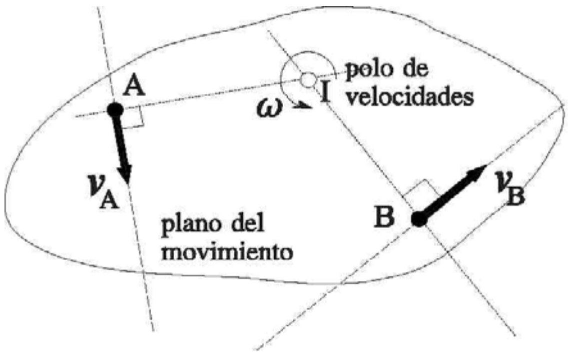
Por todo lo visto, el caso del movimiento plano de un sólido rígido se puede reducir a un movimiento instantáneo de rotación sin deslizamiento alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento. Si elegimos como punto *P* para escribir todas las velocidades del sólido la intersección del eje instantáneo de rotación con el plano *XY* la expresión de la velocidad de un punto *Q* cualquiera del sólido se reduce a:

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega}\times\vec{PQ}$$

A este punto de velocidad nula se le denomina ***centro instantáneo de rotación*** y en general se suele representar por C*IR*:

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega}\times\vec{CIRQ}$$

La posición del *CIR* en un instante dado se puede determinar gráficamente conocido el vector $\vec{\omega}$ y los vectores velocidad $\vec{v}$ de dos puntos cualesquiera *A* y *B* del sólido. Teniendo en cuenta que el vector $\vec{CIRQ}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ en ambos puntos, el centro instantáneo de rotación estará situado en la intersección de las perpendiculares a las velocidades trazadas en los puntos *A* y *B* tal y como se indica en la figura.



En el caso de que se elija como punto *P* el centro instantáneo de rotación la expresión de la aceleración lineal resulta ser:

$$\vec{a}_Q = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times \vec{CIRQ} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{CIRQ}}{dt} = +\vec{\alpha}\times\vec{CIRQ} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{CIRQ}) = \vec{\alpha}\times\vec{IQ} - \omega^2\vec{CIRQ} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$