MECÁNICA

46. Un semidisco de radio R y masa M se mantiene en un plano vertical de forma que rueda sin deslizar sobre una recta horizontal. Sobre el borde plano del semidisco hay una partícula de masa m que desliza sobre el mismo, sujeta al centro por un resorte lineal de constante k y longitud natural nula. Se considera que la partícula no llega a salir del borde.

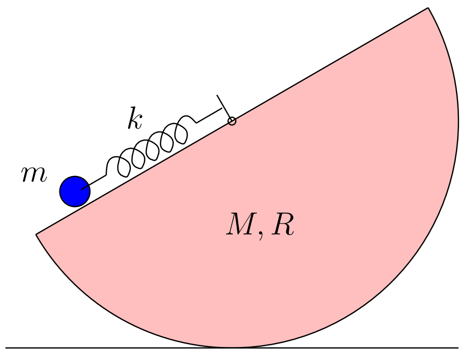
Se pide:

1. Elegir unas coordenadas generalizadas adecuadas y expresar mediante las mismas la función Lagrangiana.

2. Ecuaciones de la dinámica (de Lagrange).

3. Integrales primeras caso de haberlas.

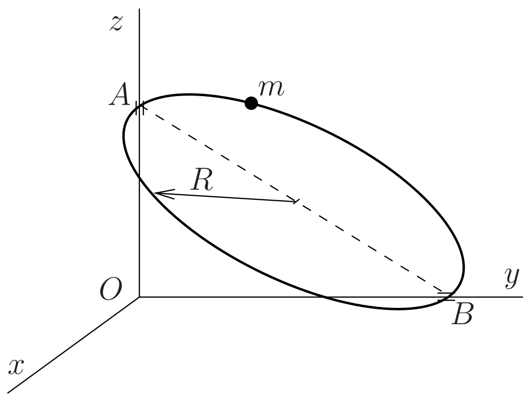
4. Suponiendo que el semidisco desliza libremente sobre la recta horizontal, obtener de nuevo la Lagrangiana y discutir las integrales primeras.



(Examen puntuable, curso 2005-06)

⋆

47. Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral lisa en un aro de radio R y masa M. El movimiento de este aro es tal que el extremo A de uno de sus diámetros desliza sobre el eje vertical fijo z, y su otro extremo B sobre el eje fijo y, manteniéndose el plano del aro perpendicular al plano Oyz. En el instante inicial B se encuentra en el origen O y por debajo de A y la partícula m sobre el diámetro paralelo a Ox, produciéndose una pequeña perturbación que ponga en movimiento al aro.



Se pide:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.

2. Estudiar la existencia de integrales primeras y en su caso obtenerlas.

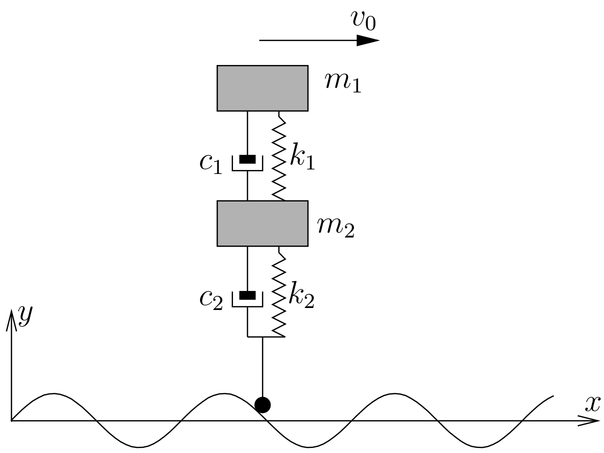
3. Se considera ahora que se impone el movimiento al diámetro AB de forma que su velocidad de rotación sea una constante ω. Se pide en esta nueva situación obtener las ecuaciones del movimiento; discutir la existencia de integrales primeras; por último, obtener el momento exterior que se debe aplicar sobre el aro para conseguir el movimiento impuesto.

4. Con las mismas condiciones del apartado anterior, obtener la reacción que ejerce el aro sobre la partícula en una posición genérica en función del grado o grados de libertad y sus derivadas.

(Basado en ejercicio 3º, examen parcial, curso 2006-07)

⋆

48. Para analizar el comportamiento dinámico de un vehículo se hace un modelo como el de la figura formado por dos masas suspendidas m_1 y m_2 que pueden oscilar únicamente en dirección vertical. Las suspensiones primaria y secundaria del vehículo se representan mediante amortiguadores y muelles lineales de constantes c_2, k_2 y c_1, k_1, respectivamente (ver figura). El vehículo recorre con velocidad horizontal constante v_0 una carretera representada por la senoide $y = A\,\mathrm{sen}(x/\lambda)$. Se pide:

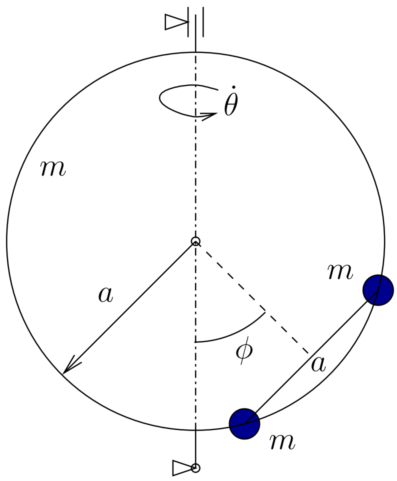


1. Expersar la función Lagrangiana del sistema
2. Ecuaciones diferenciales (de Lagrange) del movimiento.
3. Calcular la reacción ejercida sobre la carretera.

(Basado en ejercicio 2º, examen parcial y final, curso 2004-05)

---

49. El sistema de la figura consta de dos masas puntuales m, unidas por una varilla rígida y sin masa de longitud a, y ensartadas con ligadura bilateral lisa en un aro de radio a y masa m. El aro tiene un diámetro vertical que permanece fijo, pudiendo girar alrededor del mismo. Se pide:



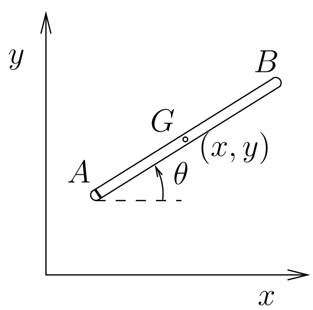
1. En la hipótesis de que el giro $\dot\theta$ alrededor del eje vertical sea libre: a) Ecuaciones diferenciales del movimiento y b) integrales primeras, caso de haberlas.
2. En la hipótesis de que el aro tenga una velocidad impuesta constante $\dot\theta = \omega$, a) ecuación diferencial del movimiento relativo al aro, b) valor de ω para que exista una posición de equilibrio relativo para $\phi = 30°$, y c) discutir la conservación de la energía y la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial y final, curso 2001-02)

---

50. Una barra homogénea AB de masa m y longitud l se mueve en un plano horizontal. En el extremo A tiene un apoyo en forma de pequeña cuchilla, que impide el movimiento de dicho punto en dirección paralela a la varilla.

Se pide:



1. Expresar la ecuación de ligadura anholónoma.
2. Usando (x, y, θ) como coordenadas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento. Emplear para ello el formalismo de la dinámica analítica, haciendo uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminar la citada ligadura.

3. Demostrar que el multiplicador de Lagrange λ representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

4. Integrar completamente las ecuaciones, suponiendo que en el instante inicial es $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$ y que el centro de la varilla tiene una velocidad v_0.

(Basado en ejercicio 3º, examen parcial y final, curso 1998-99)