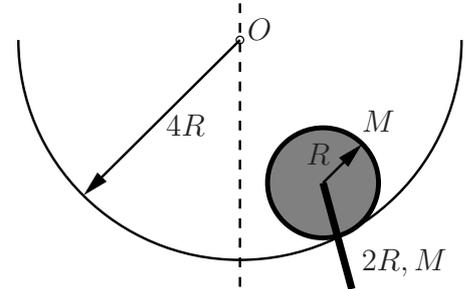


46. En un plano vertical fijo, un disco de radio  $R$  y masa  $M$  rueda sin deslizar sobre el interior de un aro fijo de radio  $4R$ . Desde el centro del disco cuelga articulada una varilla de longitud  $2R$ , con igual masa  $M$  que la del disco, que tampoco puede salirse del plano vertical. Se pide:



1. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento.

(Examen parcial, curso 2006/2007)



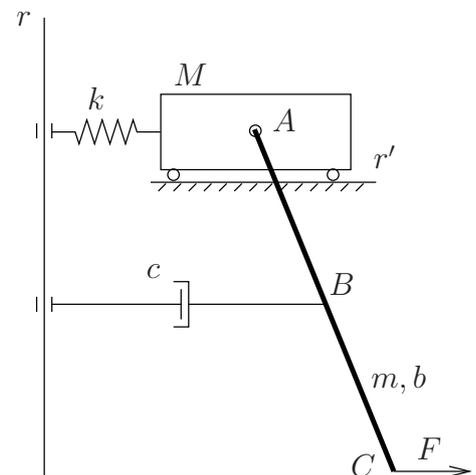
47. Una hélice tiene por ecuaciones, en coordenadas cilíndricas,  $\rho = b$ ,  $z = a\varphi$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes. Sobre ella se mueve sin rozamiento una partícula de masa  $m$ , que se encuentra atraída desde el origen de coordenadas por una fuerza proporcional a la distancia, con constante  $k$ . Se desprecia la acción de la gravedad. Se pide:

- a. Obtener las ecuaciones del movimiento e integrales primeras en su caso;
- b. Calcular la reacción de la hélice sobre la partícula, empleando multiplicadores de Lagrange;
- c. Las mismas cuestiones, suponiendo ahora que la hélice es en realidad una acanaladura en la superficie de un cilindro macizo vertical de masa  $M$ , que puede girar libremente alrededor de su eje.



48. Un sistema está formado por un carro pesado de masa  $M$  y una barra pesada  $AC$  de masa  $m$  y longitud  $b$  que se encuentra articulada en  $A$  a aquél como muestra la figura adjunta.

El carro se apoya sobre una recta horizontal fija y lisa  $r'$  y está unido a una recta vertical fija  $r$  a través de un resorte elástico de constante  $k$ . Por otro lado, el centro  $B$  de la barra se encuentra unido a la misma recta fija a través de un amortiguador lineal de constante  $c$ . Además, en el extremo  $C$  de la barra actúa una fuerza horizontal constante  $F$ . Se supone que el sistema se mueve siempre en un plano vertical fijo, que no existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles y que tanto el muelle como el amortiguador se mantienen siempre horizontales.



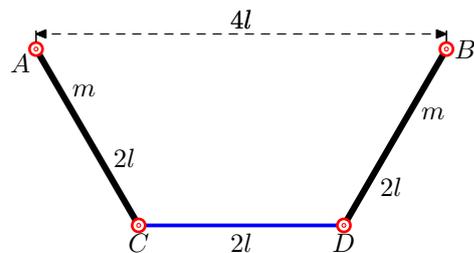
Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Discusión sobre la existencia de integrales primeras.
3. Expresión de la reacción que ejerce la recta horizontal  $r'$  sobre el carro.

(Examen Parcial y Final, curso 2003/2004)



49. Un sistema está formado por dos varillas de masa  $m$  y longitud  $2l$ , unidas mediante articulaciones a dos puntos fijos  $A$  y  $B$ , situados en la misma horizontal y distantes  $4l$ . Los extremos opuestos están unidos entre sí mediante una varilla inextensible sin masa de longitud  $2l$  que se articula en sus extremos. El movimiento tiene lugar en un plano vertical. Considerando la restricción correspondiente a la varilla sin masa mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se pide:

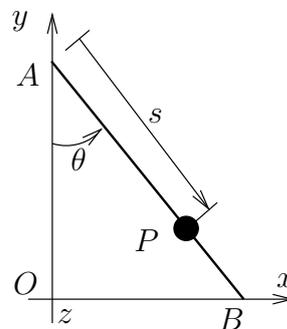


1. Coordenadas generalizadas, expresión de la restricción y grados de libertad del sistema.
2. Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento.
3. Obtener el valor del esfuerzo en la varilla de unión en función de las coordenadas y sus derivadas. Calcular igualmente la reacción en A.

(Examen parcial y final, curso 2003/2004)

★

50. Una varilla  $AB$  de masa  $m$  y longitud total  $l$  se mueve en un plano vertical de forma que el extremo  $A$  desliza sobre la vertical y el extremo  $B$  desliza sobre una recta horizontal. Asimismo, una partícula  $P$  de masa  $m$  puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con  $\theta = 30^\circ$  y  $s = 0$ .



Se pide, en función de  $s$ ,  $\theta$  y sus derivadas:

1. Expresión de la lagrangiana del sistema formado por la varilla y la partícula.
2. Ecuaciones de Lagrange.
3. Integrales primeras del movimiento.
4. Si  $\dot{\theta} = \omega$  (cte), calcular mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

(Problema puntuable, Curso 1997/1998)

★