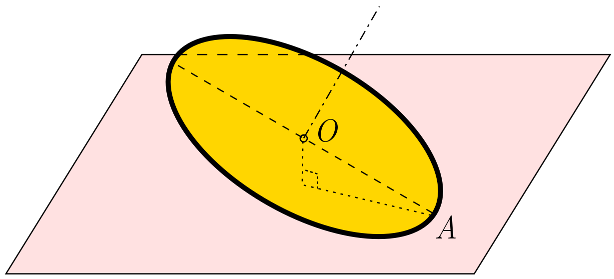
MECÁNICA

56. Un disco circular pesado, de masa M y radio R, se mueve con el borde apoyado sobre un plano horizontal liso, sobre el cual puede deslizar libremente. Se pide:

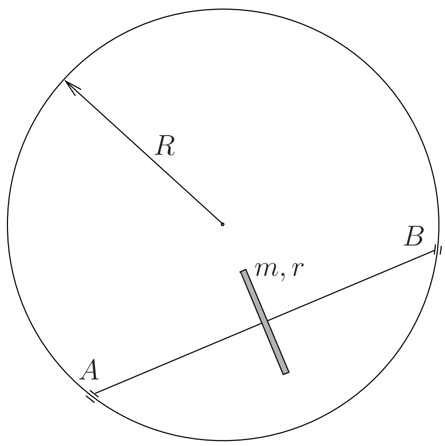


1. Tensor de inercia en el centro del disco O, escogiendo unos ejes adecuados para expresar las componentes.
2. Grados de libertad del sistema, definiendo claramente los paramétros escogidos para representarlos.
3. Momento de las fuerzas en O para una posición arbitraria, considerando un valor genérico de la reacción en el punto de contacto A.
4. Expresiones de la velocidad angular del disco y del momento cinético en O.
5. Ecuaciones de Euler de la dinámica del disco, junto con otras ecuaciones que fueran precisas para resolver completamente el sistema y calcular la reacción en A.
6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a cuadraturas.

(Examen parcial, curso 2002/2003)

---

57. Un disco pesado, de masa m y radio r, se encuentra unido perpendicularmente en su centro al punto medio de una barra AB, de masa despreciable y longitud $R\sqrt{3}$. Los extremos de esta barra pueden deslizar libremente sobre una circunferencia vertical, fija y lisa, de radio R. El disco puede girar libremente alrededor de AB. Se pide:

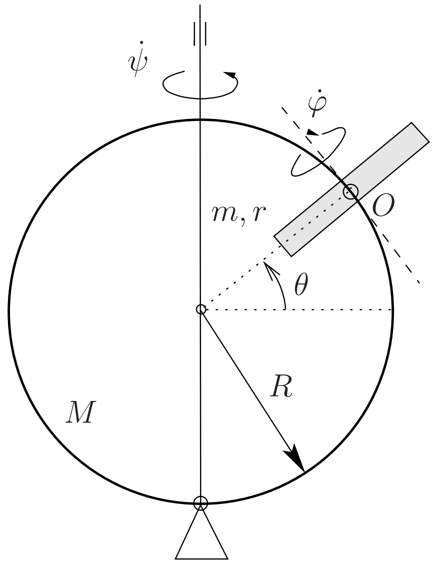


1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sistema, y en su caso obtenerlas en función de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Obtener las reacciones que ejerce la circunferencia fija en A y B.

(Examen Parcial, curso 2006/2007)

---

58. Un disco homogéneo de masa m y radio r se encuentra insertado por su centro O a un aro de masa $M = 2m$ y radio $R = r$. La vinculación entre el disco y el aro se establece mediante una ligadura bilateral lisa de forma que el eje de revolución del disco permanece tangente en todo instante a la circunferencia que define el aro. El aro sólo puede girar alrededor de su diámetro vertical fijo, siendo $\dot{\psi}$ su velocidad angular. Sea θ el ángulo que forma el plano del disco con el plano horizontal que pasa por el centro del aro y $\dot{\varphi}$ la velocidad de rotación del disco alrededor de su eje. Se pide:

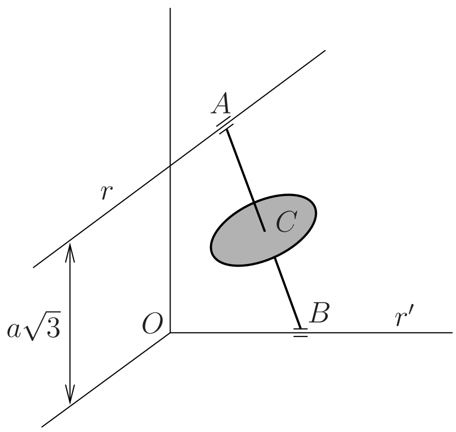


1. Expresar la velocidad angular del disco, en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas.
2. Expresar análogamente la energía cinética y potencial del sistema.
3. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y, en caso de existir, deducirlas.
4. Si inicialmente el disco se encuentra en posición horizontal ($\theta_0 = 0$) girando alrededor de su eje con velocidad ω ($\dot{\varphi}_0 = \omega$), el aro en reposo ($\dot{\psi}_0 = 0$) y la velocidad del centro del disco es nula, calcular la velocidad del centro del disco cuando se encuentre en el punto más bajo del aro. (Se supondrá que no existe ningún impedimento para que el disco recorra la totalidad del aro).

(Examen Final, curso 1997/1998)

$\star$

59. Un sólido rígido está formado por un disco homogéneo de masa m y radio R soldado perpendicularmente por su centro C al punto medio de una varilla de igual masa m y longitud $2a$. Este sólido se mueve de forma que los extremos A y B de la varilla están articulados y deslizan sin rozamiento sobre dos rectas horizontales r y r' que se cruzan perpendicularmente a una distancia $a\sqrt{3}$. Además, el sólido puede girar libremente alrededor de la varilla. Se pide:



1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresarlas en función de los grados de libertad y sus derivadas, considerando condiciones iniciales genéricas; integrar completamente estas ecuaciones obteniendo las expresiones de los g.d.l. en función del tiempo (ecuaciones horarias).
2. Calcular las reacciones.

(Examen final, curso 2006/2007)

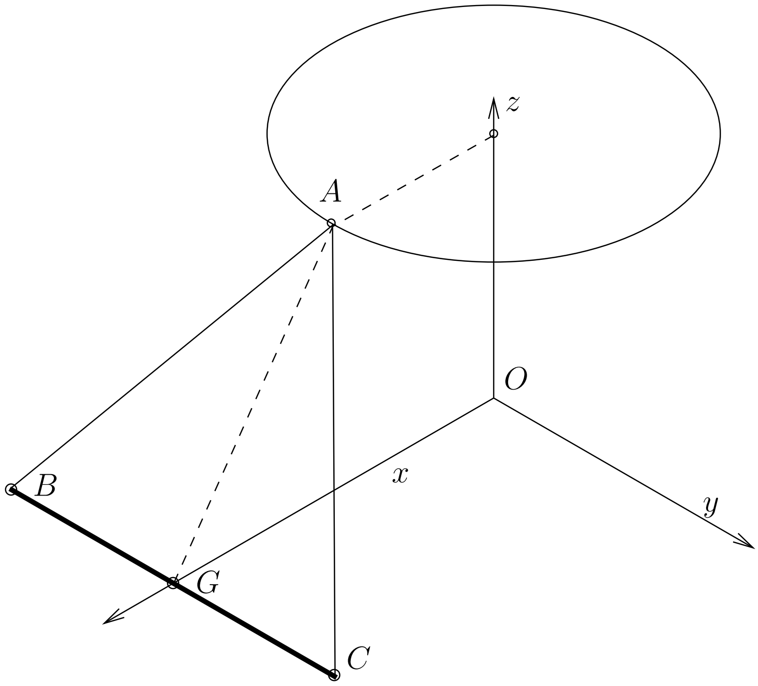
$\star$

60. Una placa triangular ABC, homogénea de lado $2a$ y masa m, se mueve de forma que A describe una circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$z = \sqrt{2}a$$

El lado BC está siempre apoyado sobre el plano horizontal Oxy y todos los vinculos son lisos. En el movimiento más general posible, se pide:



(posición inicial)

1. Describir el movimiento eligiendo unos parámetros adecuados para caracterizarlo y obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica, aplicando los teoremas generales (Newton-Euler) o las ecuaciones de Lagrange. Las condiciones iniciales son $\boldsymbol{v}_A = v_0\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{0}$, y la altura del triángulo contenida en el plano Oxz.

2. Calcular la reacción de la circunferencia sobre el vértice A del triángulo, en función de los parámetros y sus derivadas.