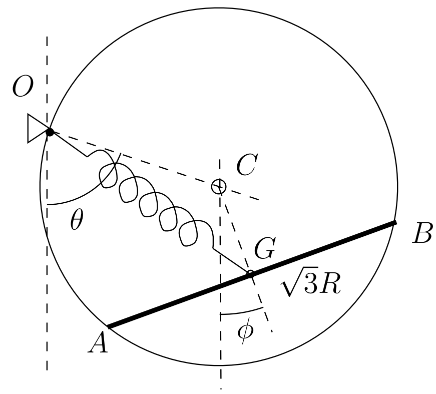
MECÁNICA

81. El sistema material de la figura, contenido en un plano vertical, está formado por un aro homogéneo de masa m y radio R, y por una varilla homogénea AB de longitud $\sqrt{3}R$ y masa $8m$. El aro puede girar libremente respecto de un punto fijo O, mientras que la varilla puede deslizar sin rozamiento sobre el aro. El centro de gravedad G de la varilla se une al punto O mediante un muelle de longitud natural nula y constante $k = 2mg/R$.

Se pide:



1. Comprobar que existe una posición de equilibrio estable del sistema en $\theta = \phi = 0$ para el valor de k dado.

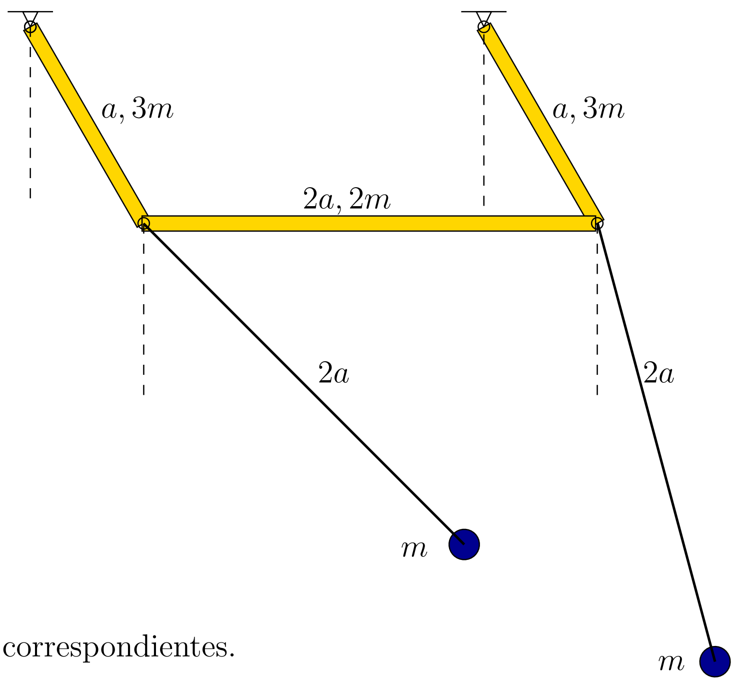
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, calculando las matrices de masas y rigideces del sistema.

3. Calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración correspondientes.

(Examen parcial, curso 2006/2007)

⋆

82. Se considera el sistema de la figura, formado por dos varillas iguales de longitud a y masa $3m$ articuladas en sendos puntos fijos, a la misma altura y distantes $2a$, junto con una tercera varilla de masa $2m$ y longitud $2a$ articulada en los extremos libres. A su vez de estos extremos cuelgan sendos péndulos simples de longitud $2a$ y masa puntual m. El movimiento del conjunto se desarrolla en un plano vertical. Se pide:



1. Obtener las expresiones de la energía cinética y potencial en función de los grados de libertad y sus derivadas.

2. Para el caso de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, calcular a partir de las expresiones anteriores las matrices de masa y rigidez correspondientes.

3. Calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración asociados. Expresar la matriz modal que relaciona las coordenadas normales con las geométricas.

(Examen parcial, curso 2005/2006)

⋆

83. Una placa rectangular homogénea de masa M y lados (a, b) está en posición horizontal apoyada en sus extremos por cuatro muelles verticales idénticos de constante k. Determinar para pequeñas oscilaciones las frecuencias y los modos de vibración.

⋆

84. Sea una peonza simétrica sometida al campo gravitatorio terrestre, definida por los momentos principales de inercia (A, A, C), y cuyo centro de masas G dista d de un punto fijo O sobre el eje.

Se pide:

1. Obtener la Hamiltoniana del sistema, ecuaciones Canónicas e integrales primeras empleando como coordenadas los ángulos de Euler (ψ, θ, φ).
2. Teniendo en cuenta las coordenadas cíclicas, eliminarlas para obtener la Routhiana y las ecuaciones correspondientes para las coordenadas no cíclicas. Comprobar la equivalencia de estas últimas con las ecuaciones de Lagrange.

⋆

85. Se conoce la Hamiltoniana de un sistema:

$$H = a(p^1)^2 + b(p^2)^2 + c(q_1)^2 + d(q_2 - q_1)^2$$

donde a, b, c, d son constantes positivas.

Se pide obtener la Lagrangiana e identificar el tipo de sistema al que corresponde.

⋆