MECÁNICA

6. Un punto material M, de masa m, está sometido a la acción de la gravedad y a una fuerza de atracción hacia un punto fijo O. La fuerza atractiva es proporcional a la masa del punto M y a la distancia MO. El coeficiente de proporcionalidad se tomará igual a k^2. Se considerarán unos ejes cartesianos $OXYZ$ de forma que el origen es el centro atractivo y el eje OZ es vertical descendente. En el instante inicial el punto material M se encuentra en la posición definida por las coordenadas

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}g}{k^2}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$$

y está dotado de una velocidad cuyas componentes son:

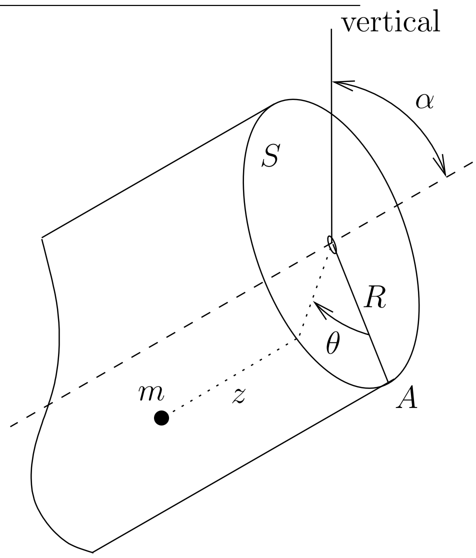
$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \frac{4g}{k}, \quad \dot{z}_0 = 0$$

Se pide:

1. Estudiar el movimiento del punto material M y en particular definir claramente la trayectoria.
2. Calcular los valores máximo y mínimo de la velocidad del punto M.

⋆

7. Una partícula pesada de masa m se mueve sin rozamiento con ligadura bilateral sobre una superficie cilíndrica de revolución de radio R cuyo eje forma un ángulo α con la vertical.
Para fijar la posición de la partícula sobre la superficie, consideramos una sección recta S de la misma, donde A es el punto más bajo de ella. La posición de la partícula queda entonces determinada mediante los parámetros θ y z representados en la figura.



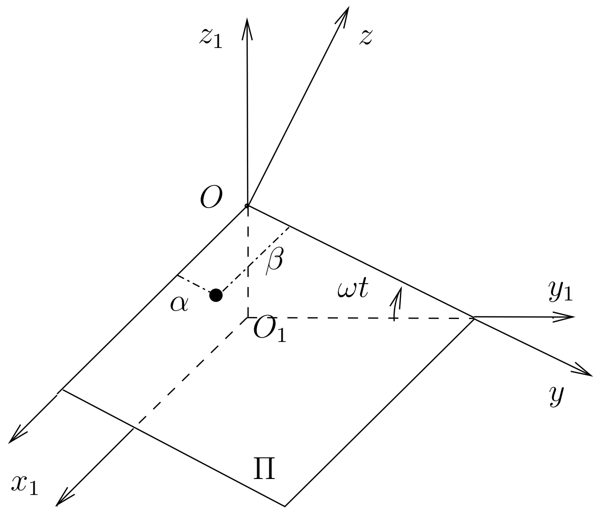
Se pide:

1. Expresión de las ecuaciones diferenciales de orden 2 del movimiento de la partícula;
2. Reducir las ecuaciones del apartado anterior a cuadraturas;
3. Discutir los distintos tipos de movimientos que pueden presentarse según los valores de $\dot{\theta}_0$ si la partícula se lanza desde $\theta_0 = \pi/2$.

(Problema Puntuable, Curso 03/04)

⋆

8. Un plano liso Π se mueve respecto a un triedro fijo $O_1x_1y_1z_1$ con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ de tal forma que dos rectas paralelas del mismo que están separadas por una distancia a deslizan respectivamente por los planos $O_1x_1y_1$, $O_1x_1z_1$ como se indica en la figura.
Sobre el plano Π se mueve sin rozamiento un punto pesado M de masa m, siendo α y β las distancias que los separan en un instante genérico de las rectas Ox, Oy. Se pide:



1. Plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Integrar completamente las ecuaciones anteriores suponiendo que en el instante inicial el punto M se encuentra en el origen de coordenadas con una velocidad relativa que forma un ángulo φ con la recta Ox.
3. Calcular la reacción entre el punto y el plano.

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

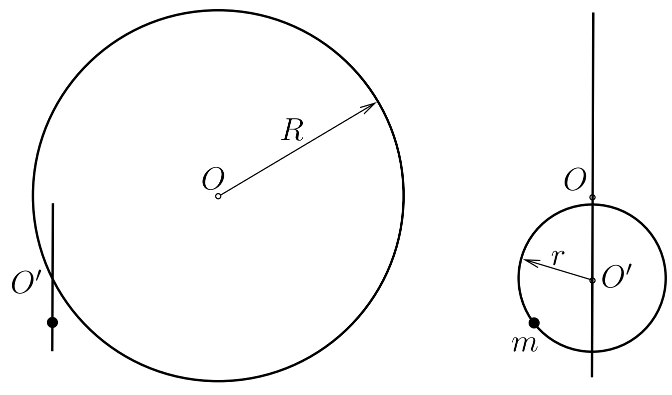
———————— ⋆ ————————

9. Un punto material de masa m se puede mover, sin rozamiento, sometido a la acción de su propio peso, en la superficie interior de un paraboloide de revolución de ecuación $x^2 + y^2 = az$.
Se pide:

1. Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Demostrar que el punto describe una circunferencia horizontal en un plano cualquiera con tal de que tenga una velocidad angular $\omega^2 = 2g/a$.
3. Se supone que cuando el punto material pasa por la posición que corresponde a $z = a$, su velocidad es horizontal y vale $v^2 = 8ga$. Hallar la cota más alta que alcanza la trayectoria del punto.

———————— ⋆ ————————

10. Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral lisa en un aro sin masa de radio r. Este aro se mueve a su vez de forma que se mantiene siempre vertical y su centro O' desliza sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio R. El plano vertical del aro es siempre perpendicular al plano vertical fijo de la circunferencia.



a) Vista frontal b) Vista lateral

Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema y justificar la elección de parámetros que los representen. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento de la partícula;

2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula;

3. Obtener la reacción que ejerce el aro sobre la partícula en una posición genérica en función de los grados de libertad y sus derivadas.

(Examen parcial, 2005)