MECÁNICA

6. Una partícula material y pesada M, de masa m, es atraída por un eje vertical con una fuerza proporcional a su masa y a la distancia existente entre la partícula y dicho eje, siendo ω^2 el coeficiente de proporcionalidad.

Además de las fuerzas gravitatoria y atractiva, sobre dicha partícula actúa una fuerza de resistencia opuesta y proporcional a la velocidad siendo el coeficiente de proporcionalidad

$$c = \frac{2\sqrt{5}}{5} m\omega$$

En el instante inicial la partícula está situada en un punto del eje atractivo y está dotada de una velocidad horizontal de valor v_0.

Se pide:

1. Plantear las ecuaciones del movimiento de la partícula.

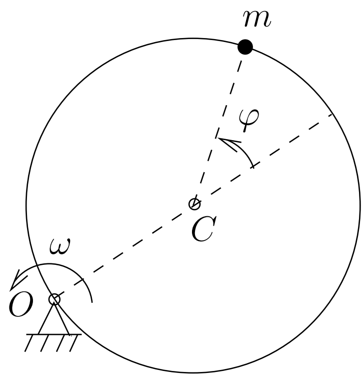
2. Integrar las ecuaciones del movimiento de la partícula.

3. Calcular el valor máximo de la distancia entre la partícula y el eje atractivo.

4. Demostrar que existe un valor límite de la velocidad y determinarlo.

---

7. Una partícula de masa m está ligada a una circunferencia lisa de radio R sobre la que desliza libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme ω alrededor de un punto O de su perímetro.



Se pide:

1. Empleando como parámetro el ángulo φ (ver figura adjunta), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.

2. Obtener la ecuación diferencial del movimiento.

3. Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.

4. ¿Se conserva la energía total (T+V)? (responder razonadamente).

5. Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión de las derivadas primeras, en este caso $\dot{\varphi}$). Tomar como condiciones iniciales $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega$.

---

8. Un punto material de masa m se mueve sin rozamiento sobre la superficie $x^2+y^2-2Ry=0$. En dichos ejes la fuerza del campo gravitatorio simplificado lleva la dirección del eje Z en sentido negativo. El origen de coordenadas O atrae al punto material con una fuerza proporcional a la masa y a la distancia de constante k^2 ($F = mk^2 r$). En el instante $t = 0$, el punto material se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas O y su velocidad es $v = 2kai$. Se pide:

a. Ecuaciones horarias del movimiento.

b. Reacción que la superficie ejerce sobre el punto.

⋆

9. Sea C una curva plana lisa contenida en un plano vertical. Un punto pesado de masa m se mueve por ella de tal manera que la componente vertical de la velocidad permanece constante a lo largo de todo el movimiento e igual a $-2\sqrt{2ag}/3$, encontrándose en el instante inicial en el origen de coordenadas. Sabiendo que a lo largo del movimiento el punto sólo se encuentra somedido a su peso y a la reacción N, se pide:

1. Aplicar las ecuaciones de la cantidad de movimiento según la tangente y la normal a C.
2. Obtener el valor de la reacción normal N en función de ϕ.
3. Hallar el valor de la velocidad v en función de ϕ.
4. Obtener la ecuación que liga ϕ con el tiempo.
5. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en función del parámetro ϕ.
6. Hallar la ecuación implícita de C y dibujarla.

⋆

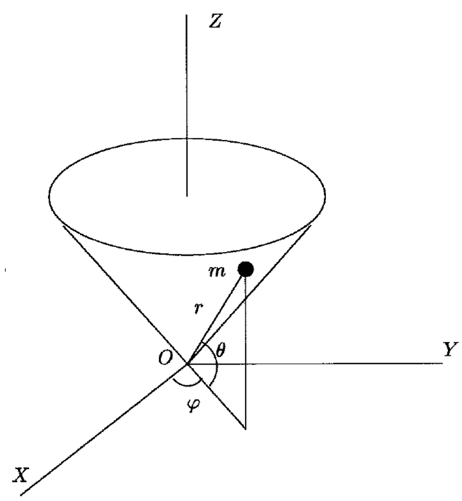
10. Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral sobre el cono:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

siendo $z > 0$. En el instante inicial la partícula se encuentra en $z = z_0$ con velocidad horizontal $v_0 = \omega_0 z_0$.

Empleando coordenadas esféricas, se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Determinar entre que valores de z se desarrolla el movimiento.
3. Calcular el valor necesario de ω_0 para que la trayectoria de la partícula sea una circunferencia.



⋆