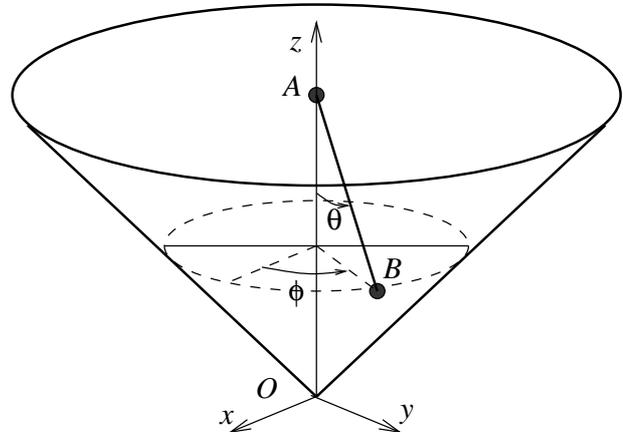


**36.** Se considera un sistema rígido formado por dos partículas pesadas  $A$  y  $B$  de masa  $m$  cada una, unidas por una varilla inextensible sin masa de longitud  $\ell$ . La partícula  $A$  se mueve sobre el eje  $Oz$  vertical, mientras que  $B$  permanece sobre un cono fijo de eje  $Oz$  y semiángulo  $\pi/4$ , siendo ambas ligaduras lisas y bilaterales. Para estudiar el movimiento se considerarán las coordenadas  $(\phi, \theta)$  de la figura adjunta, tomando como condiciones iniciales  $(\phi_0 = 0, \theta_0, \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0 = 0)$ .



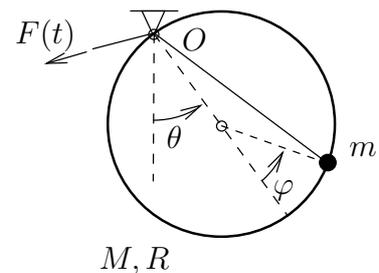
Se pide:

1. Obtener las ecuaciones de la dinámica que expresan el balance de la cantidad de movimiento del sistema.
2. Obtener las ecuaciones de la dinámica que expresan el balance del momento cinético en  $O$  del sistema. Estudiar si se conserva la proyección del mismo respecto de algún eje.
3. Obtener la expresión de la reacción del cono sobre  $B$  en función de los grados de libertad y sus derivadas.
4. Razonar si se conserva la energía y obtener en su caso la expresión de la misma.

(Examen parcial, curso 04/05)

★

**37.** Una aro de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia  $O$  fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa  $m$ . Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por  $O$  a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza  $F(t)$  dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.



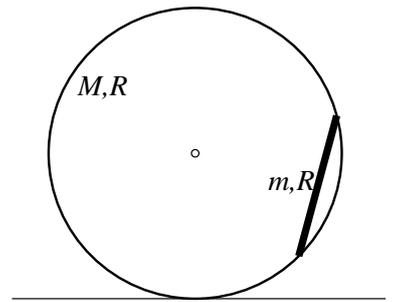
Se pide:

1. Momento cinético en  $O$  del sistema formado por el aro y la partícula.
2. Expresión del principio del momento cinético del sistema aro-partícula en  $O$ .
3. Expresión del principio de la cantidad de movimiento de la partícula.
4. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.
5. Expresar la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico.

(Problema puntuable, curso 98/99)

★

**38.** Un aro de masa  $M$  y radio  $R$ , rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose constantemente en un plano vertical. Sobre él desliza sin rozamiento una varilla homogénea de masa  $m$  y longitud  $R$ , manteniendo sus extremos sobre el aro con una ligadura bilateral y que no estorba para la rodadura. Se pide:

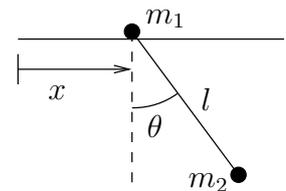


1. Calcular las reacciones de la recta sobre el aro y del aro sobre la varilla, expresándolas en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.
3. Obtener la reacción tangencial de la recta sobre el aro (fuerza de rozamiento) empleando multiplicadores de Lagrange y comprobar que da el mismo resultado del apartado primero.

(Examen parcial, curso 03/04)

★

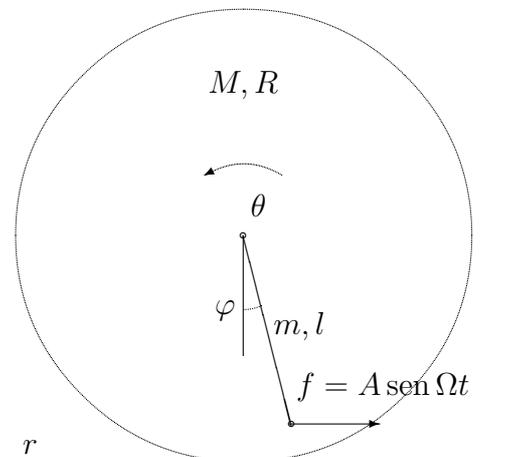
**39.** El sistema plano de la figura adjunta está formado por una masa  $m_1$  que desliza libremente sobre una recta horizontal, y unida a ella mediante un hilo tenso de longitud  $l$  otra masa  $m_2$ . Se pide:



1. En función de las coordenadas cartesianas de cada partícula  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$  expresar las ligaduras existentes y el número de grados de libertad del sistema.
2. Parametrizando las coordenadas mediante las magnitudes  $(x, \theta)$ , expresar las ecuaciones de la dinámica que resultan del principio de D'Alembert.
3. Obtener mediante los teoremas generales de Newton-Euler las ecuaciones de la dinámica y comprobar que equivalen a las obtenidas en el apartado anterior.

★

**40.** Un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta  $r$ , manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa  $m$  y longitud  $l < R$ . En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor  $f = A \sin \Omega t$ . El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir del Principio de D'Alembert.



★