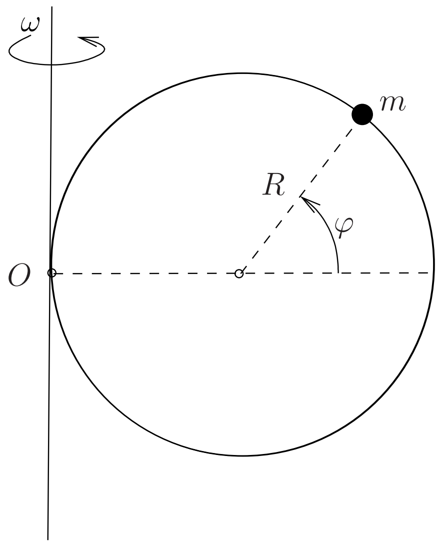
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (7 de noviembre de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un aro de radio R, sin masa, se encuentra contenido en un plano vertical. Este plano gira con velocidad angular constante, ω, alrededor de una recta vertical fija que pasa por un punto O de la periferia. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m con ligadura bilateral y sin rozamiento. Además del peso, la partícula está sujeta a una fuerza atractiva proporcional a la distancia a la recta fija, siendo k la constante de proporcionalidad. Se pide:



1. Aceleración de la partícula.
2. Obtener la ecuación diferencial del movimiento.
3. Calcular la reacción que ejerce el aro sobre la partícula así como el momento M que es necesario aplicar para imponer el citado movimiento en función de φ y sus derivadas.

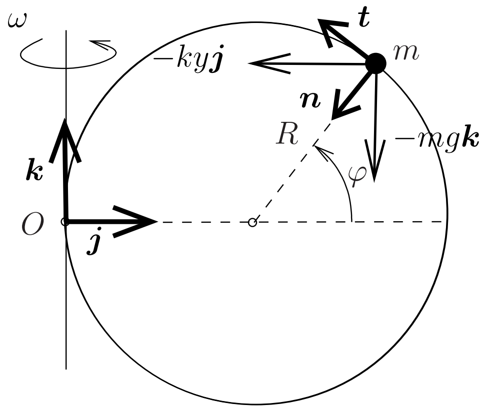
---

1. La aceleración de la partícula se puede expresar a través del sistema móvil $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que acompaña el movimiento del aro alrededor del eje vertical que pasa por O:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{cor}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{rel} &= R\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + R\dot{\varphi}^2\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{a}_{arr} &= -R(1+\cos\varphi)\omega^2\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 2\dot{\omega}\,\boldsymbol{k} \wedge (R\dot{\varphi})\boldsymbol{t} = 2R\omega\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{t}$ es el vector unitario tangente al aro y $\boldsymbol{n}$ el normal.



2. La ecuación de la cantidad de movimiento resulta

$$-\,mg\,\boldsymbol{k} - kR(1+\cos\varphi)\boldsymbol{j} + R_n\,\boldsymbol{n} + R_x\,\boldsymbol{i} = m\boldsymbol{a} \qquad (1)$$

La ecuación diferencial finalmente resulta proyectando (1) según la tangente $\boldsymbol{t}$ al aro:

$$\boxed{-mg\cos\varphi + kR(1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi = mR\ddot{\varphi} + mR\omega^2(1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

3. La reacción normal tiene como componentes $\boldsymbol{R} = R_n\boldsymbol{n} + R_x\boldsymbol{i}$; de manera que proyectando la ecuación (1) en las direcciones $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{i}$, se obtiene:

$$R_n = mR\dot\varphi^2 + mR\omega^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi - mg\,\mathrm{sen}\,\varphi - kR(1+\cos\varphi)\cos\varphi$$
$$R_x = 2mR\omega\dot\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

El momento $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{k}$ se deduce de la ecuación del momento cinético:

$$\frac{dH_z}{dt} = M_z$$

sabiendo que la velocidad de la partícula se puede expresar como:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{v}_{arr} = R\dot\varphi\,\boldsymbol{t} - R\omega(1+\cos\varphi)\boldsymbol{i}$$

El momento cinético resulta:

$$H_z = (\boldsymbol{r}\wedge m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{k} = mR^2\omega(1+\cos\varphi)^2$$

El momento que es necesario aplicar para imponer el movimiento deseado es:

$$\boxed{M = \frac{dH_z}{dt} = -2mR^2\omega(1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\dot\varphi}$$

Se puede comprobar que M coincide con el momento de R_x alrededor del eje vertical. Ya que el resto de las fuerzas no dan momento respecto al eje vertical.