Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL ORDINARIO (14 de junio de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

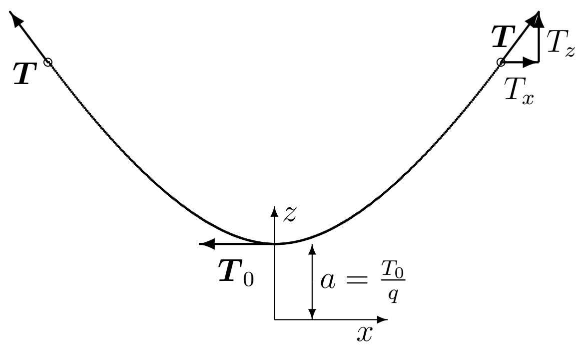
Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Para un hilo homogéneo sometido a su peso propio q por unidad de longitud, *expresar* la ecuación de la curva de equilibrio. *Deducir* razonadamente la expresión de la longitud s del hilo en función de la coordenada horizontal x. *Deducir* igualmente las expresiones de la tensión T y de sus componentes horizontal y vertical. (5 puntos.)

La configuración de equilibrio es la llamada *catenaria*, cuya ecuación es (apuntes de la asignatura, p.15.11):

$$\boxed{z = a\cosh\frac{x}{a},}$$

donde $a = T_0/q$, siendo T_0 la tensión en el vértice, y tomándose el origen de los ejes a una distancia a por debajo del mismo.



La longitud del hilo, entre el vértice y un punto cualquiera, se halla integrando:

$$s = \int_0^x \sqrt{1+(z')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\,\mathrm{d}x = a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

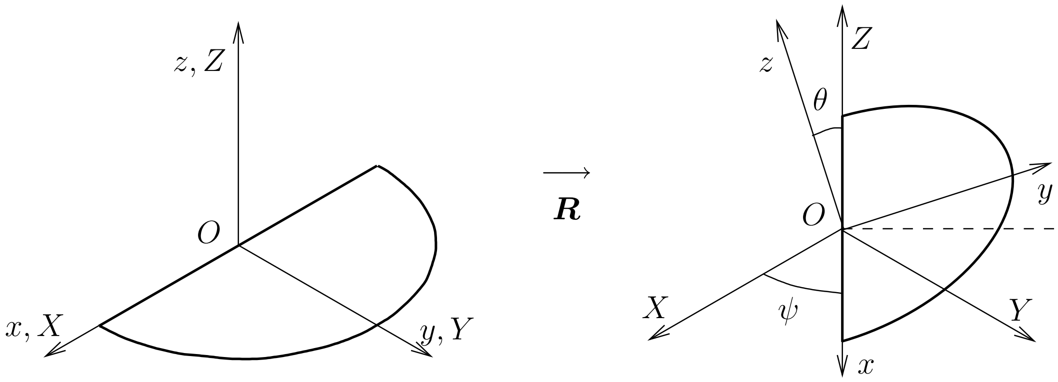
Planteando el equilibrio de fuerzas para un tramo de cable desde el vértice (tensión $T_0\,\boldsymbol{i}$) a un punto genérico (tensión $\boldsymbol{T} = T_x\,\boldsymbol{i} + T_z\,\boldsymbol{k}$) se obtiene:

$$T_x = T_0;$$
$$T_z = qs = qa\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Por último, la tensión total es

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} = qa\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} = qa\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = qz.$$

Enunciar la propiedad fundamental del tensor $\boldsymbol{R}$ que define la rotación finita de un sólido rígido. Para el caso del semidisco de la figura, *obtener* la matriz de componentes $[\boldsymbol{R}]$ para la rotación que se define. Mediante esta matriz, *expresar* la relación entre las coordenadas de un punto del sólido rotado en el triedro del cuerpo (x, y, z) y en el triedro fijo (X, Y, Z). Siendo M la masa del semidisco y R el radio, *obtener* las componentes $[\boldsymbol{I}_O]$ del tensor de inercia en O para el triedro del cuerpo. *Obtener* igualmente la expresión matricial que define las componentes $[\boldsymbol{I}'_O]$ del tensor de inercia en el triedro fijo. (5 puntos.)



Sea una rotación que transforma el vector posición $\boldsymbol{x}$ relativo a O, ligado al sólido, en otro $\boldsymbol{X}$, caracterizada por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}$. El tensor $\boldsymbol{R}$ debe ser ortogonal, es decir $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$. Esto se demuestra porque debe conservarse la distancia,

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \big((\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{x}\big) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{1}$$

Para obtener las componentes de $\boldsymbol{R}$ evaluamos en primer lugar las proyecciones sobre el triedro fijo de los versores del triedro del cuerpo:

$\boldsymbol{i} = (\cos\psi,\ \operatorname{sen}\psi,\ 0)$; $\boldsymbol{j} = (-\operatorname{sen}\psi\cos\theta,\ \cos\psi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$; $\boldsymbol{k} = (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta,\ -\cos\psi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$

Esto permite establecer la matriz de componentes que relaciona los vectores de ambos triedros, $\{\boldsymbol{e}_i\}^{\mathrm{T}} = \{\boldsymbol{E}_I\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}]$, donde se ha empleado la notación $\{\boldsymbol{e}_i\}^{\mathrm{T}} := (\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$, y $\{\boldsymbol{E}_I\}^{\mathrm{T}} := (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K})$:

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi\cos\theta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La relación que se establece entre las coordenadas del vector posición $\boldsymbol{r}$ de un punto del sólido, medido desde el punto O, es:

$$\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{e}_i\}^{\mathrm{T}} \cdot \{x_i\} = \{\boldsymbol{E}_I\}^{\mathrm{T}} \cdot \{X_I\} \quad \Rightarrow \quad \{X_I\} = [\boldsymbol{R}]\{x_i\} \tag{1}$$

La expresión indicial de este cambio de coordenadas es

$$X_I = R_{Ii} x_i \tag{2}$$

El tensor de inercia en el triedro del sólido para el semidisco tiene la misma forma que el de un disco completo,

$$[\boldsymbol{I}_O] = \frac{1}{4} M R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La expresión en el triedro del cuerpo de las componentes de $\boldsymbol{I}_O$ se deduce haciendo el cambio de coordenadas definido por (2), para los dos índices del tensor:

$$I'_{IJ} = R_{Ii} R_{Jj} I_{ij} \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{I}'_O] = [\boldsymbol{R}] \cdot [\boldsymbol{I}_O] \cdot [\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}}$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (14 de junio de 1999)

BORRADOR