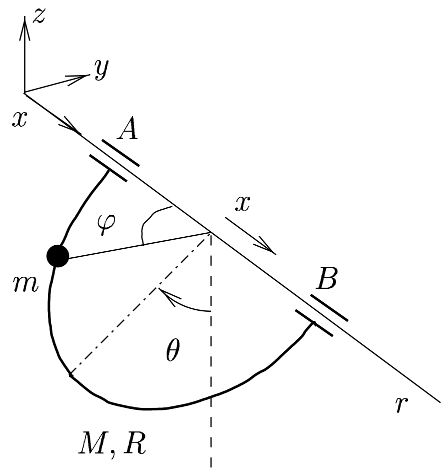
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (14 de Junio de 1999)

Apellidos *Nombre* *N"o* *Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 60 min.

Un semiaro pesado de masa M y radio R puede deslizar y girar sin rozamiento a lo largo de una recta horizontal fija r por su diámetro AB. Además, una partícula pesada de masa m desliza sin rozamiento ensartada en el semiaro. Se pide:



1. Expresiones de la energía cinética y potencial del sistema formado por la partícula y el semiaro.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Expresar las posibles integrales primeras e interpretarlas físicamente.
4. Expresión de la reacción entre el aro y la partícula en función de las coordenadas generalizadas seleccionadas y sus derivadas.

1.- Adoptando como grados de libertad los parámetros (x, φ, θ) indicados en la figura, la energía cinética de la partícula y el semiaro resultan:

$$T_{\text{part.}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\operatorname{sen}\varphi + R^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\varphi) \qquad (1)$$

$$T_{\text{s.aro}} = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \left(\frac{2R}{\pi}\right)^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

El potencial total con respecto a un plano horizontal que pasa por la recta r se expresa como:

$$V = -Mg\left(\frac{2R}{\pi}\right)\cos\theta - mgR\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \qquad (3)$$

2.- Empleando (1), (2) y (3), la función lagrangiana del sistema es la siguiente:

$$L = T - V = \frac{1}{2}[(m+M)\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + 2mR\dot{\varphi}\dot{x}\operatorname{sen}\varphi] + Mg\left(\frac{2R}{\pi}\right)\cos\theta + mgR\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \qquad (4)$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de lagrange, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Para las coordenadas generalizadas $\{q_i\}^{\mathrm{T}} = (x, \varphi, \theta)$ se obtienen, respectivamente, las tres ecuaciones siguientes:

$$(m+M)\dot{x} + mR\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \text{cte.} \tag{5}$$

$$mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\varphi - mR^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi - mgR\cos\varphi\cos\theta = 0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + 2mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + g\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{2MR}{\pi} + mR\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) = 0 \tag{7}$$

3.- La coordenada x es cíclica ya que no aparece explícitamente en la función lagrangiana, por lo que el momento generalizado asociado a dicha coordenada (5) es constante. Es fácil comprobar que dicho momento corresponde a la cantidad de movimiento en la dirección de la recta r. Esta magnitud debe conservarse ya que no existen fuerzas exteriores con componentes en dicha dirección.

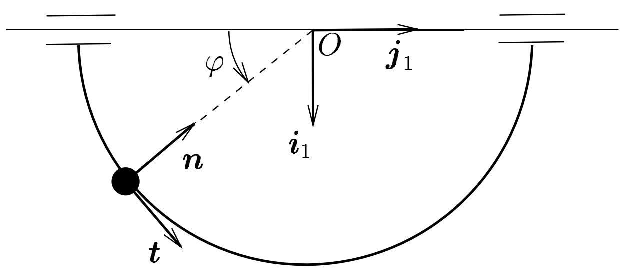
Asimismo se conserva la energía del sistema ya que todas las fuerzas activas derivan de un potencial. De este modo las dos integrales primeras son:

$$p^x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + mR\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \text{cte.}$$

$$\begin{aligned} E = T + V =& \frac{1}{2}[(m+M)\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + 2mR\dot{\varphi}\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\varphi] \\ & - Mg\left(\frac{2R}{\pi}\right)\cos\theta - mgR\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \end{aligned}$$

4.- De acuerdo con la figura se define un sistema de coordenadas móviles que acompaña en su movimiento al semiaro $(O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$, con origen en su centro. La reacción se puede descomponer en su componente normal al plano del semiaro, R_{z_1}, y en la componente normal dentro del plano, R_n.

Expresando las ecuaciones de la dinámica de la partícula en estas dos direcciones, en función también del peso de la partícula y su aceleración (absoluta) $\boldsymbol{a}$, resulta:



$$\begin{aligned} R_{z_1} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta &= m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}_1) \\ R_n - mg\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta &= m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}) \end{aligned}$$

La aceleración (absoluta) $\boldsymbol{a}$ tiene las siguientes componentes, expresadas a través del sistema móvil definido con anterioridad:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{rel} &= R\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + R\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{n}; \\ \boldsymbol{a}_{arr} &= -R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{i}_1 + \ddot{x}\boldsymbol{j}_1 + R\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{k}_1; \\ \boldsymbol{a}_{cor} &= 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{k}_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtienen las componentes pedidas:

$$\begin{aligned} R_{z_1} &= mg\,\mathrm{sen}\,\theta + mR\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi + 2mR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi; \\ R_n &= mg\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + mR\dot{\varphi}^2 + m\ddot{x}\cos\varphi + mR\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi. \end{aligned}$$