Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

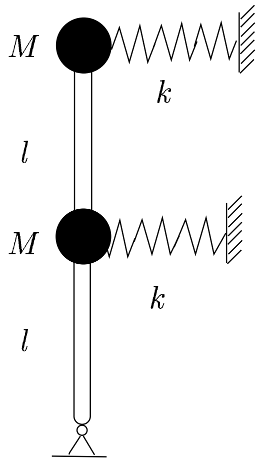
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Un sistema definido por coordenadas generalizadas $\{q_i, i = 1 \cdots n\}$ tiene la función potencial $V(q_i)$. Definimos como matriz de rigidez $K_{ij} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$. Se supone conocido un punto de equilibrio $(q_i)_0$. ¿cuál es la condición de estabilidad del equilibrio para pequeñas perturbaciones? ¿a qué relación obliga esta condición para con los autovalores de la matriz de rigidez? Aplicación: supuesto el sistema de la figura formado por dos varillas articuladas sin masa y dos masas puntuales de valor M, en equilibrio para la posición vertical, obtener el valor mínimo de k para que el equilibrio sea estable. Calcular los autovalores de la matriz de rigidez del conjunto si el valor de k es el doble del calculado anteriormente. (5 puntos)



La estabilidad del equilibrio se produce si la matriz $[K_{ij}]$ es definida positiva (menores principales todos positivos), lo que indica un mínimo del potencial V. Esta condición equivale a exigir que todos sus autovalores sean estrictamente positivos, $\lambda_i > 0$.

Aplicación.- Sean (θ_1, θ_2) los ángulos formados con la vertical por cada una de las barras. La expresión del potencial es

$$V = Mgl\cos\theta_1 + Mg(l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(l\,\mathrm{sen}\,\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(l\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)^2, \qquad (1)$$

donde se ha supuesto que la acción de los resortes es proporcional a su elongación horizontal. Derivando y particularizando para la posición de equilibrio comprobamos que $\partial V/\partial\theta_1|_{(0,0)} = \partial V/\partial\theta_2|_{(0,0)} = 0$. Derivando de nuevo y particularizando para la posición de equilibrio, resulta

$$[K_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2(kl^2 - Mgl) & kl^2 \\ kl^2 & kl^2 - Mgl \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La ecuación característica del problema de autovalores para la matriz anterior es

$$0 = \begin{vmatrix} 2(kl^2 - Mgl) - \lambda & kl^2 \\ kl^2 & (kl^2 - Mgl) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3(kl^2 - Mgl)\lambda + 2(kl^2 - Mgl)^2 - (kl^2)^2 \qquad (3)$$

Los autovalores, soluciones de esta ecuación, son $\lambda = \frac{3}{2}(kl^2 - Mgl) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(kl^2 - Mgl)^2 + 4(kl^2)^2}$, y al imponer que el mínimo de los dos autovalores (signo $-$ de la raíz) sea positivo, resulta:

$$k_{\min} = (2 + \sqrt{2})\frac{Mg}{l}.$$

Haciendo $k = 2k_{\min} = 2(2 + \sqrt{2})\frac{Mg}{l}$, y sustituyendo en la ecuación (3), resultan como solución los autovalores siguientes, que se comprueba fácilmente son positivos:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Mgl}{2}\left[3(3 + 2\sqrt{2}) \pm \sqrt{113 + 76\sqrt{2}}\right] > 0.$$

Un sólido rígido de masa M se mueve con un punto O fijo, bajo la acción de la gravedad. Los momentos principales de inercia en O son (A, A, C), y la distancia del CDM a O es l. Expresar las integrales primeras del movimiento y su interpretación física. ¿En el caso de que los tres momentos principales fuesen distintos (A, B, C), alguna de las anteriores expresiones de las integrales primeras dejaría de ser una constante del movimiento? ¿Por qué? (5 puntos)

En función de los ángulos de Euler (ψ, θ, φ), las componentes de la velocidad de rotación del sólido pueden expresarse como

$$\omega_x = p = \dot{\theta}; \quad \omega_y = q = \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta; \quad \omega_z = r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \tag{4}$$

evaluando éstas según las direcciones del llamado *triedro intermedio*, cuyo eje Oz es el de revolución del cuerpo, Ox horizontal y Oy perpendicular a los anteriores. Este triedro sigue al cuerpo salvo por su rotación propia ($\varphi = 0$). El momento de las fuerzas exteriores en O es $\boldsymbol{M}_O = l\,\boldsymbol{k} \wedge (-Mg\,\boldsymbol{K})$.

Existen tres integrales primeras:

1. *Momento cinético en O proyectado según el eje vertical fijo OZ.*
   Puesto que todas las fuerzas aplicadas son verticales o pasan por O,

   $$0 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K}) \tag{5}$$

   Teniendo en cuenta que el ángulo $\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{k} \rangle = \theta$, por lo que $\boldsymbol{K} = \cos\theta\,\boldsymbol{k} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$, la constante resulta

   $$\boxed{\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = A\dot{\psi} \operatorname{sen}^2 \theta + Cr\cos\theta = H \quad \text{(cte.)}} \tag{6}$$

2. *Momento cinético en O proyectado según el eje de revolución móvil Oz.*
   Puesto que $\boldsymbol{M}_O$ es perpendicular a Oz,

   $$0 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{k} = \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{H}_O \cdot \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{7}$$

   Al no ser fijo el eje $\boldsymbol{k}$ existe un término adicional, pero en este caso se comprueba que es nulo:

   $$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{H}_O = Ap\,\boldsymbol{i} + Aq\,\boldsymbol{j} + Cr\,\boldsymbol{k} \\ \dfrac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{k} = q\,\boldsymbol{i} - p\,\boldsymbol{j} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = Apq - Aqp = 0 \tag{8}$$

   Por lo que la constante del movimiento es

   $$\boxed{\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = Cr \quad \text{(cte.)}} \tag{9}$$

3. *Energía total.*
   Puesto que todas las fuerzas son conservativas,

   $$\boxed{T + V = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}Cr^2 + Mgl\cos\theta = E \quad \text{(cte.)}} \tag{10}$$

En el caso de un cuerpo sin simetría de revolución, siendo el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O = \operatorname{diag}(A, B, C)$, con $A \neq B$, el razonamiento para las integrales primeras 1. y 3. anteriores sigue siendo válido. Sin embargo, para la 2. el término adicional debido a la variación de $\boldsymbol{k}$ no se anula:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{H}_O = Ap\,\boldsymbol{i} + Bq\,\boldsymbol{j} + Cr\,\boldsymbol{k} \\ \dfrac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{k} = q\,\boldsymbol{i} - p\,\boldsymbol{j} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = Apq - Bqp \neq 0 \tag{11}$$

por lo que esta expresión deja de ser constante del movimiento.