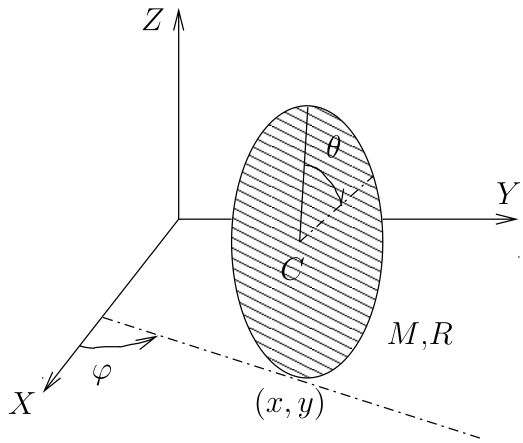
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 6.º Tiempo: 50 min.



Un disco de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre un plano rugoso horizontal. Existe una restricción en el punto de contacto de forma que a lo largo de su movimiento el disco permanece siempre vertical. Inicialmente posee una velocidad de pivotamiento $\dot{\varphi}_o = \omega_1$ y una velocidad de rodadura $\dot{\theta}_o = \omega_2$. Sea (x, y, R) la posición del centro del disco C en un instante genérico. Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema a partir de las coordenadas que se definen en la figura.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Integrar completamente las ecuaciones y obtener la trayectoria del centro del disco a partir de las condiciones iniciales.
4. Calcular la reacción del plano sobre el disco. (NOTA: exclusivamente las componentes de la fuerza de reacción en el punto de contacto, sin tener en cuenta el momento que se debe ejercer en la ligadura para mantener la verticalidad del disco.)

1.- El disco posee dos grados de libertad como consecuencia de la existencia de dos restricciones holónomas y dos anholónomas. Las restricciones holónomas se deducen de imponer que el plano del disco sea vertical a lo largo de su movimiento (rotación nula alrededor de un eje horizontal en el plano del disco), así como a la condición de permanencia del centro C en un plano horizontal, $z = R$. Las dos restricciones anholónomas se obtienen de la condición de rodadura sin deslizamiento entre el disco y el plano horizontal, estableciéndose las ecuaciones expresadas más adelante (3) y (4). Las coordenadas independientes adoptadas son φ y θ.

2.- La función lagrangiana del sistema se puede identificar con la energía cinética dado que la función potencial es una constante:

$$L = T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_C \cdot \boldsymbol{\Omega}). \tag{1}$$

Se define el triedro intermedio $\{C, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$ de manera que $\boldsymbol{j}_1$ se orienta según la vertical ascendente y $\boldsymbol{k}_1$ es ortogonal al plano del disco. La velocidad angular del disco expresada en dicho triedro resulta $\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta}\boldsymbol{k}_1 + \dot{\varphi}\boldsymbol{j}_1$, y el tensor central de inercia:

$$[\boldsymbol{I}_C] = MR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La condición de rodadura sin deslizamiento del punto P de contacto entre el disco y el plano se impone a través de la ecuación vectorial siguiente:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{PC} = R\dot{\theta}\boldsymbol{i}_1, \tag{2}$$

que expresada en los ejes fijos resulta:

$$\dot{x} = R\dot{\theta}\cos\varphi \tag{3}$$
$$\dot{y} = R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{4}$$

A partir de estas ecuaciones se desarrolla la expresión de la función lagrangiana (1), teniendo en cuenta que $v_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\theta}^2$, de lo que resulta

$$L = \frac{1}{8}MR^2(6\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2).$$

Al no depender L ni de φ ni de θ, se deduce que ambas son coordenadas cíclicas, dando lugar a las siguientes integrales primeras:

$$p_\theta = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = \omega_2(\text{cte.})$$
$$p_\varphi = \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi} = C_2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega_1(\text{cte.})$$

Integrando para unas condiciones iniciales genéricas y sustituyendo en las ecuaciones (3), (4) resulta:

$$\theta = \omega_2 t + \theta_0; \quad \varphi = \omega_1 t + \varphi_0;$$

$$x = \frac{\omega_2 R}{\omega_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \varphi_0) + x_0;$$
$$y = -\frac{\omega_2 R}{\omega_1}\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + y_0;$$

de modo que el centro del disco describe una circunferencia de radio $\omega_2 R/\omega_1$.

3.- La reacción $\boldsymbol{R}$ del plano sobre el disco se puede obtener directamente de la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\boldsymbol{R} - Mg\boldsymbol{j}_1 = M\boldsymbol{a}_C$$

La aceleración del centro del disco C se puede obtener derivando la ecuación (2) teniendo en cuenta que la velocidad está expresada en un triedro móvil:

$$\boldsymbol{a}_C = R\ddot{\theta}\boldsymbol{i}_1 + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{j}_1 \wedge \boldsymbol{i}_1 = R\ddot{\theta}\boldsymbol{i}_1 - R\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1$$

resultando la reacción finalmente:

$$\boldsymbol{R} = Mg\boldsymbol{j}_1 - MR\omega_1\omega_2\boldsymbol{k}_1$$