Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 1999)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 2.º* Tiempo: 30 min.

Una masa $m$ se mueve según una recta horizontal lisa, unida por un resorte lineal de constante $k = m\omega_0^2$ a un punto $Q$ de la misma, con un amortiguamiento viscoso de constante $c = 2m\xi\omega_0$ asociado a dicho resorte. Se impone al punto $Q$ un movimiento armónico de amplitud $A$ y frecuencia angular $\Omega$ según dicha recta. En función de la elongación del resorte ($x$), obtener de forma justificada:

1. ecuación diferencial del movimiento;
2. amplitud del movimiento en régimen permanente;

---

**1.–** El movimiento impuesto de la base del muelle es $x_Q(t) = A\,\mathrm{sen}\,\Omega t$. El desplazamiento (absoluto) de la masa es suma de este movimiento impuesto y la propia elongación del muelle, $x_Q + x$, lo que debe ser tenido en cuenta para expresar la aceleración (absoluta) de la masa, $\ddot{x}_Q + \ddot{x}$. Sin embargo, las fuerzas elástica y de resistencia viscosa del resorte son proporcionales únicamente a su elongación ($-kx$) y a la derivada de la misma ($-c\dot{x}$). La ecuación del movimiento es por tanto

$$m(\ddot{x}_Q + \ddot{x}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t.}$$

**2.–** El movimiento en régimen permanente vendrá dado por una expresión del tipo $x_p(t) = B\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi)$. Para calcular las constantes $(B, \phi)$ obligamos a que cumpla la ecuación diferencial:

$$-mB\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi) + cB\Omega\cos(\Omega t + \phi) + kB\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi) = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t,$$

y particularizamos en dos instantes,

1. para $t = 0$:

$$-mB\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\phi + cB\Omega\cos\phi + kB\,\mathrm{sen}\,\phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k} = \frac{2\xi(\omega_0/\Omega)}{1 - (\omega_0/\Omega)^2};$$

2. para $\Omega t + \phi = 0$:

$$cB\Omega = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}(-\phi) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{mA\Omega\,\mathrm{sen}\,\phi}{c} = -\frac{A\,\mathrm{sen}\,\phi}{2\xi(\omega_0/\Omega)}.$$

Eliminando $\phi$ entre estas dos ecuaciones se obtiene el valor de la amplitud pedida $B$:

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\phi}} = \frac{c\Omega}{\sqrt{(m\Omega^2 - k)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{2\xi(\omega_0/\Omega)}{\sqrt{(1 - (\omega_0/\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0/\Omega)^2}}$$

$$\boxed{B = -\frac{mA\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2 - k)^2 + c^2\Omega^2}} = -\frac{A}{\sqrt{(1 - (\omega_0/\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0/\Omega)^2}}}$$