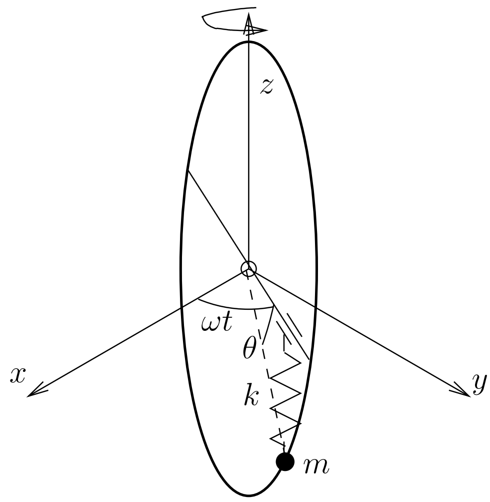
Mecánica

1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

Una partícula de masa m se mueve libremente sobre un aro circular liso y rígido, de radio R, que tiene un movimiento de rotación impuesto con velocidad angular ω constante alrededor de un diámetro vertical fijo. Además del peso, sobre la partícula actúa un resorte lineal de constante k y longitud natural nula, cuyo otro extremo desliza libremente sobre el diámetro horizontal del aro.



Se pide:

1. Componentes de la aceleración (absoluta) de la partícula en las direcciones tangencial al aro, normal al mismo según la dirección radial y normal al plano del mismo, en función de θ y sus derivadas.
2. Ecuación diferencial del movimiento.
3. Expresión general de la reacción del aro sobre la partícula, así como el momento que se necesita aplicar al aro para obtener el movimiento impuesto (se supondrá masa nula para el aro).
4. Si en el instante inicial la partícula parte de una posición sobre el diámetro horizontal con velocidad relativa nula, deducir razonadamente el máximo y mínimo de la inclinación θ en el movimiento subsiguiente.

1.– Definimos los versores $\boldsymbol{u}_r$ según la dirección radial (positivo hacia r creciente), $\boldsymbol{u}_\theta$ según la tangente al aro (θ creciente también) y $\boldsymbol{u}_\varphi = \boldsymbol{u}_r \wedge \boldsymbol{u}_\theta$, es decir, perpendicular al aro y dirigido hacia dentro. Emplearemos también de forma auxiliar el versor $\boldsymbol{i}' = \cos\theta\,\boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta$ según el diámetro horizontal del aro.

Calculamos la aceleración absoluta a partir del movimiento de la partícula relativo al aro, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}}$. El movimiento del aro es una rotación ω alrededor del eje fijo Oz, y el movimiento relativo al aro es circular con velocidad constante $R\dot\theta\,\boldsymbol{u}_\theta$, por lo que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= -\omega^2(R\cos\theta)\,\boldsymbol{i}' = -\omega^2 R\cos^2\theta\,\boldsymbol{u}_r + \omega^2 R\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta\\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\omega\,\boldsymbol{k}\wedge R\dot\theta\,\boldsymbol{u}_\theta = -2R\omega\dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi\\
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= R\ddot\theta\,\boldsymbol{u}_\theta - R\dot\theta^2\,\boldsymbol{u}_r
\end{aligned}$$

Agrupando términos resulta

$$\boxed{\begin{cases} a_r = -R\omega^2\cos^2\theta - R\dot\theta^2,\\ a_\theta = R\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + R\ddot\theta,\\ a_\varphi = -2R\omega\dot\theta\operatorname{sen}\theta.\end{cases}} \qquad (1)$$

Otro procedimiento para obtener este mismo resultado —y más directo, por cierto— sería aplicar las expresiones de la aceleración en coordenadas esféricas. Por último, otra alternativa —en este caso más trabajosa, pero igualmente válida— sería expresar directamente las coordenadas cartesianas inerciales (x, y, z), derivar dos veces, y proyectar según las direcciones pedidas.

2.– El movimiento tiene un único grado de libertad, θ. La ecuación de la dinámica en esta dirección, en la que no existe ninguna reacción, expresa por tanto la dinámica del sistema. Las fuerzas aplicadas corresponden al peso $(-mg\,\boldsymbol{k})$ y el resorte $(kR\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{k})$ —cuya posición es siempre vertical ya que su base desliza libremente—. Resulta pues

$$\boxed{mg\cos\theta - kR\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = mR\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + mR\ddot{\theta}} \tag{2}$$

3.– Las ecuaciones dinámicas en las otras dos direcciones permiten expresar las reacciones. La reacción (normal) del aro tiene una componente radial (N_r) y otra perpendicular a su plano (N_φ), proveniente esta última del momento aplicado según el eje del aro que le hace girar con velocidad constante. La componente radial resulta

$$\boxed{N_r = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta + kR\,\mathrm{sen}^2\theta - mR\omega^2\cos^2\theta - mR\dot{\theta}^2}$$

y el momento pedido

$$\boxed{M_\varphi = N_\varphi R\cos\theta = -2mR^2\dot{\theta}\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta.}$$

4.– En el instante inicial es $\dot{\theta} = 0$, por lo que $\theta_0 = 0$ es precisamente uno de los valores extremos. El otro extremo lo obtendremos a partir de una integral primera del movimiento. Para ello multiplicamos la ecuación dinámica (2) por $\dot{\theta}$,

$$mg\dot{\theta}\cos\theta - kR\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = mR\omega^2\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + mR\dot{\theta}\ddot{\theta},$$

y observamos que admite una integración directa, en función de una constante de integración:

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}kR\,\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{2}mR\omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 + C.$$

El valor de la constante C se calcula a partir de las condiciones iniciales $(\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0)$, resultando $C = 0$. Para hallar los extremos de θ particularizamos en la ecuación anterior $\dot{\theta} = 0$, resultando

$$\frac{1}{2}mR\omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}kR\,\mathrm{sen}^2\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0;$$

esta ecuación admite la solución $\mathrm{sen}\,\theta = 0$, correspondiente al punto de partida $\theta_0 = 0$ que ya conocíamos. La otra solución es

$$\boxed{\mathrm{sen}\,\theta = \frac{2mg}{mR\omega^2 + kR}.}$$

Puede verse que necesariamente el otro extremo corresponde a un valor positivo de θ (máximo), correspondiendo a un punto en la parte inferior del aro.