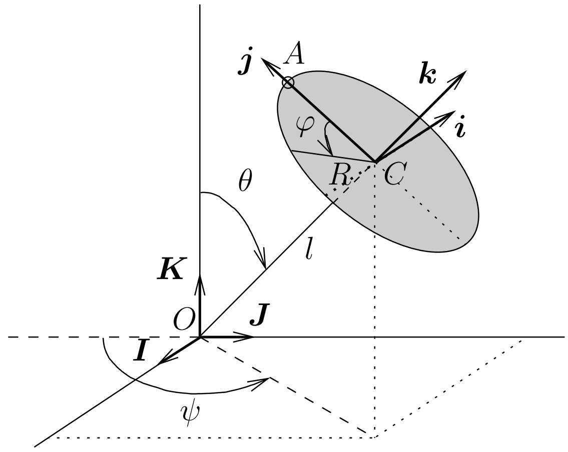
Mecánica

1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de Noviembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Un sólido está formado por una varilla de longitud l, perpendicular a un disco de radio R, a cuyo centro C se halla soldada por un extremo. El otro extremo O de la varilla se encuentra fijo, sin más restricciones a su movimiento. Se considera adicionalmente al sistema de referencia fijo $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$, otro sistema móvil $(C; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, definido tal que el vector $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla, el vector $\boldsymbol{j}$ lleva la dirección de la línea de máxima pendiente del disco, y el vector $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.
En un instante genérico, como el que se muestra en la figura adjunta, la varilla forma un ángulo θ con la vertical, su proyección horizontal forma un ángulo ψ con el eje $-Y$, y el disco ha girado un ángulo φ en su propio plano.



Se pide:

1. Velocidad angular absoluta del disco ($\boldsymbol{\Omega}$), expresada en en el sistema fijo $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ y en el sistema móvil $(C; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ en función de (ψ, θ, φ) y sus derivadas.
2. Velocidad angular absoluta ($\boldsymbol{\omega}$) del sistema de referencia móvil $(C; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
3. Aceleración angular absoluta del disco ($\dot{\boldsymbol{\Omega}}$).
4. Velocidad absoluta del punto A del sólido que en un cierto instante se encuentra en el extremo superior del diámetro de máxima pendiente.

1.- El movimiento general del disco es una rotación pura, puesto que existe un punto fijo O. Esta rotación resulta de la composición de tres rotaciones: una rotación $\dot{\psi}$ alrededor del eje vertical $\boldsymbol{K}$; una rotación $\dot{\theta}$ alrededor del eje móvil $\boldsymbol{i}$, y una rotación $\dot{\varphi}$ alrededor del eje la varilla $\boldsymbol{k}$. Por tanto, podemos expresar $\boldsymbol{\Omega}$ como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Para hallar las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$, es necesario determinar previamente algunas de las relaciones que expresan el cambio de base entre el sistema fijo $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ y el móvil $(C; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Estas relaciones, que se obtienen mediante razonamientos geométricos sencillos, resultan:

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j} + \cos\theta \boldsymbol{k} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{i} = \cos\psi \boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\psi \boldsymbol{J} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{k} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\theta \cos\psi \boldsymbol{J} + \cos\theta \boldsymbol{K} \tag{4}$$

NOTA: *Aunque no es imprescindible en el contexto de este problema, es interesante observar que estas relaciones se pueden expresar de manera más compacta con el siguiente formato matricial:*

$$||\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}|| = ||\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{K}|| \cdot \mathsf{R} \qquad ; \qquad ||\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{K}|| = ||\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}|| \cdot \mathsf{R}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

Siendo $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\theta \operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *la matriz de rotación que representa el cambio de base. Esta matriz es ortogonal, y verifica* $\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{R}^{\mathrm{T}}$.

Teniendo en cuenta las relaciones (1), (2), (3) y (4), se obtienen las expresiones de $\boldsymbol{\Omega}$ en ambos sistemas de referencia:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k} &(6)\\ &= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi)\boldsymbol{I} + (\dot{\theta}\operatorname{sen}\psi - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi)\boldsymbol{J} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{K} &(7) \end{aligned}$$

2.- La velocidad angular absoluta ($\boldsymbol{\omega}$) del sistema de referencia móvil coincide con $\boldsymbol{\Omega}$ salvo en la rotación propia alrededor de la varilla ($\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$), por lo que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k} &(8)\\ &= \dot{\theta}\cos\psi\boldsymbol{I} + \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{J} + \dot{\psi}\boldsymbol{K} &(9) \end{aligned}$$

3.- La aceleración angular ($\dot{\boldsymbol{\Omega}}$) puede calcularse de varias maneras. Si se desea su expresión en el sistema móvil lo más conveniente es mediante la derivada relativa,

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}. \tag{10}$$

Empleando (6), (8) y (10), resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + (\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta})\boldsymbol{j} + (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}$$

En el caso de querer expresar $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ en el sistema fijo, lo más conveniente es derivar cada componente de la $\boldsymbol{\Omega}$ expresada en el fijo, a partir de (7):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} =& (\ddot{\theta}\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\operatorname{sen}\psi + \ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi)\boldsymbol{I}\\ &+ (\ddot{\theta}\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi - \ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi)\boldsymbol{J}\\ &+ (\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{K} \end{aligned}$$

4.- Para hallar la velocidad del punto del sólido A aplicamos la expresión del campo de velocidades $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{OA}$. Lo más sencillo es expresarla en el sistema móvil, en el que $\boldsymbol{r}_{OA} = R\boldsymbol{j} + l\boldsymbol{k}$. Empleando (6) se obtiene entonces:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{OA} = \left[l\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta - R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\right]\boldsymbol{i} - l\dot{\theta}\boldsymbol{j} + R\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$