Mecánica

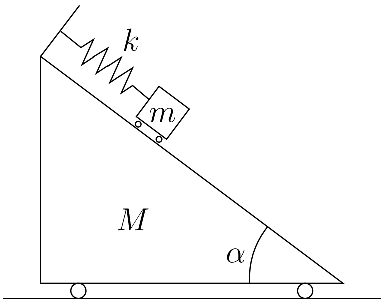
2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: parcial 6/30, final 10/60) Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar el principio de D'Alembert, para un sistema formado por N partículas $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$, sometidas a enlaces lisos. *Aplicar* dicho principio al sistema de la figura adjunta, sometido a su propio peso y a la acción del resorte lineal de constante k y longitud natural nula, desarrollando las ecuaciones de la dinámica.



Enunciado.– Sean $\boldsymbol{r}_i$ las posiciones de cada partícula del sistema, y $\boldsymbol{f}_i$ las resultantes de fuerzas aplicadas sobre las mismas. El principio de D'Alembert afirma que:

> En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:
> $$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i}_{\delta W} - \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.}} \tag{1}$$

Aplicación.– Para definir la configuración tomaremos los parámetros x, desplazamiento horizontal de la cuña M hacia la derecha, y w, desplazamiento de m según el plano inclinado, relativo a la cuña y positivo hacia abajo. Consideraremos los versores $\boldsymbol{i}$ (según la coordenada x), $\boldsymbol{j}$ (vertical ascendente) y $\boldsymbol{u}_w$ (según la coordenada w). Las variaciones $(\delta x, \delta w)$ arbitrarias son compatibles con los enlaces del sistema, y producen los siguientes desplazamientos virtuales de cada cuerpo:

$$\delta\boldsymbol{r}_M = \delta x\boldsymbol{i}; \quad \delta\boldsymbol{r}_m = \delta x\boldsymbol{i} + \delta w\boldsymbol{u}_w. \tag{2}$$

Las aceleraciones son:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_M = \ddot{x}\boldsymbol{i}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_m = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{w}\boldsymbol{u}_w. \tag{3}$$

Las fuerzas aplicadas valen:

$$\boldsymbol{f}_M = kw\boldsymbol{u}_w; \quad \boldsymbol{f}_m = -mg\boldsymbol{j} - kw\boldsymbol{u}_w. \tag{4}$$

(Es irrelevante considerar el peso de M ya que se mueve según la horizontal y no realiza trabajo.)

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= M \ddot{\boldsymbol{r}}_M \cdot \delta \boldsymbol{r}_M + m \ddot{\boldsymbol{r}}_m \cdot \delta \boldsymbol{r}_m \\ &= M\ddot{x}\delta x + m(\ddot{x}\delta x + \ddot{w}\delta x \cos\alpha + \ddot{x}\delta w \cos\alpha + \ddot{w}\delta w).\end{aligned} \tag{5}$$

Por otra parte, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas vale

$$\begin{aligned}\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{f}_M \cdot \delta \boldsymbol{r}_M + \boldsymbol{f}_m \cdot \delta \boldsymbol{r}_m \\ &= mg\delta w \operatorname{sen}\alpha - kw\delta w.\end{aligned} \tag{6}$$

Igualando (5) y (6) y agrupando términos se llega a:

$$[-(M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\ddot{w}\cos\alpha)]\,\delta x + [-(m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{w}) + mg\operatorname{sen}\alpha - kw]\,\delta w = 0 \quad \forall(\delta x, \delta w). \tag{7}$$

Teniendo en cuenta en esta ecuación que tanto δx como δw son arbitrarios, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, que definen la evolución dinámica del sistema:

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\ddot{w}\cos\alpha = 0 \tag{8}$$

$$m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{w} = mg\operatorname{sen}\alpha - kw. \tag{9}$$