Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

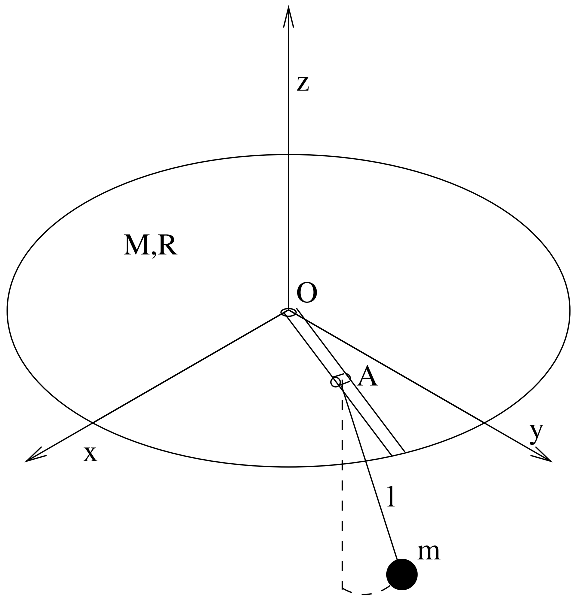
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: parcial 12/30, final 10/60) Tiempo: 60 min.

Un disco de masa M y radio R puede girar libremente alrededor de su eje de revolución vertical Oz. En el disco existe una acanaladura radial lisa por la que desliza una rótula cilíndrica A, que a su vez es el punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m. La rótula A actúa obligando al péndulo a moverse en el plano vertical que contiene a la ranura OA. Se pide:



1. Obtener las ecuaciones del movimiento de la masa puntual, utilizando métodos de la dinámica analítica.
2. Expresar las posibles integrales primeras del movimiento del sistema e interpretarlas físicamente.
3. Suponiendo ahora que el disco no está libre, sino que se le obliga a girar con velocidad constante ω, estudiar el movimiento de la masa puntual.
4. Obtener el valor del momento que es necesario aplicar al disco para mantener la velocidad ω constante.

1.- Escogemos como grados de libertad el ángulo φ que forma la acanaladura con el eje fijo x, la distancia s de la rótula A al centro del disco y el ángulo θ que forma la varilla del péndulo con la vertical descendente.

La función Lagrangiana toma la forma:

$$L = T_{\text{disco}} + T_{\text{particula}} - V_{\text{particula}} \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}v_p^2 + mgl\cos\theta\,, \tag{2}$$

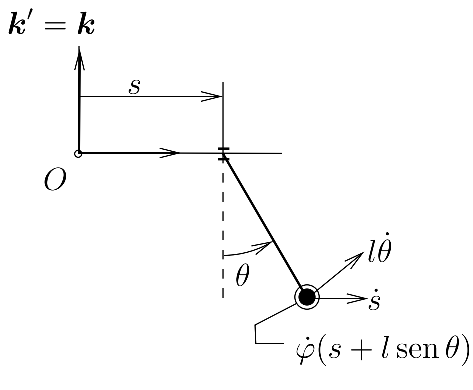


Figura 1: *Cálculo de $\boldsymbol{v}_p$*

siendo $\boldsymbol{v}_p$ la velocidad absoluta de la partícula. Una forma de calcular $\boldsymbol{v}_p$ es haciendo uso del sistema de referencia móvil $S' = \{O; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$. Este sistema tiene su origen en el centro O del disco, el vector $\boldsymbol{i}'$ está definido por la dirección del segmento OA, el vector

$\boldsymbol{k}'$ coincide con el $\boldsymbol{k}$ absoluto, y el eje $\boldsymbol{j}'$ es perpendicular a ambos. El sistema móvil S' así definido es no inercial y gira con una velocidad angular $\dot\varphi$ alrededor de la vertical.

Las velocidades relativa y de arrastre tienen las expresiones:

$$(\boldsymbol{v}_p)_{\text{rel}} = (\dot s + l\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{i}' + (l\dot\theta\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}' \qquad (\boldsymbol{v}_p)_{\text{arr}} = \dot\varphi(s + l\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{j}'$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_p = (\boldsymbol{v}_p)_{\text{rel}} + (\boldsymbol{v}_p)_{\text{arr}}$, la expresión de la Lagrangiana (2) toma entonces la forma:

$$L = \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot s^2 + l^2\dot\theta^2 + 2l\dot s\dot\theta\cos\theta + \dot\varphi^2(s + l\operatorname{sen}\theta)^2\right] + mgl\cos\theta \tag{3}$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtienen a partir de (3), y resultan:

$$\ddot s + l\ddot\theta\cos\theta - l\dot\theta^2\operatorname{sen}\theta - \dot\varphi^2(s + l\operatorname{sen}\theta) = 0 \tag{4}$$

$$\ddot\varphi\left[\frac{1}{2}MR^2 + m(s + l\operatorname{sen}\theta)^2\right] + \dot\varphi\left[2m(s + l\operatorname{sen}\theta)(\dot s + l\dot\theta\cos\theta)\right] = 0 \tag{5}$$

$$l^2\ddot\theta + l\ddot s\cos\theta - \dot\varphi^2 l\cos\theta(s + l\operatorname{sen}\theta) + gl\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

2.- La coordenada φ es cíclica puesto que $(\partial L/\partial\varphi) = 0$, por lo que existe una integral primera dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi\left[\frac{1}{2}MR^2 + m(s + l\operatorname{sen}\theta)^2\right] = cte.$$

Su interpretación física es la conservación de la componente vertical del momento cinético, como puede comprobarse fácilmente.

Por otro lado, todas las fuerzas aplicadas derivan de un potencial estacionario, y los enlaces son lisos. Esto implica que la energía total se conserva:

$$E = T + V = \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot s^2 + l^2\dot\theta^2 + 2l\dot s\dot\theta\cos\theta + \dot\varphi^2(s + l\operatorname{sen}\theta)^2\right] - mgl\cos\theta = cte$$

3.- Si el disco gira con velocidad constante, el sistema tiene 2 g.d.l. y el movimiento está representado por la nueva función Lagrangiana L que resulta de sustituir $\dot\varphi = \omega$ en (3). Puede comprobarse que las dos ecuaciones del movimiento se obtienen simplemente sustituyendo $\dot\varphi = \omega$ en (4) y (6).

En este caso, la energía total no es constante, puesto que existe un par exterior impuesto. No obstante, existe la integral de Jacobi, dada por:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial\dot s}\dot s + \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta - L \\ &= \frac{1}{2}m(\dot s^2 + l^2\dot\theta^2 + 2l\dot s\dot\theta\cos\theta) - \frac{1}{4}MR^2\omega^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(s + l\operatorname{sen}\theta)^2 - mgl\cos\theta = cte \end{aligned} \tag{7}$$

La interpretación física de (7) es la constancia de la energía total relativa al sistema móvil S', incluyendo el potencial ficticio de arrastre.

4.- El momento necesario N se obtiene liberando la coordenada φ, de forma que a la derecha de la ecuación (5) aparece la fuerza generalizada $Q_\varphi = N$. Después de sustituir en ella $(\dot\varphi = w, \ddot\varphi = 0)$, el momento resulta:

$$N = 2m\omega(s + l\operatorname{sen}\theta)(\dot s + l\dot\theta\cos\theta)$$