

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos

Nombre

N.º

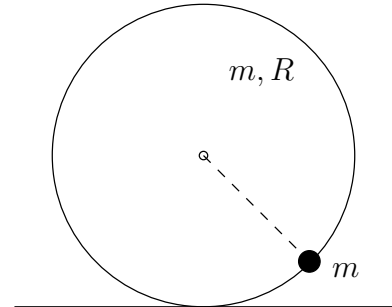
Grupo

--	--	--	--

Ejercicio 3.º (puntuación: parcial 12/30, final 10/60)

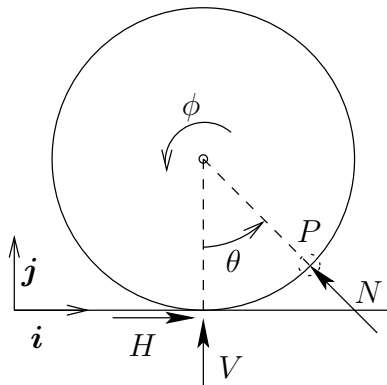
Tiempo: 60 min.

Un aro de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Sobre él se mueve sin rozamiento una partícula de masa m con ligadura bilateral que no estorba la rodadura. Aplicando los teoremas de Newton-Euler, se pide:

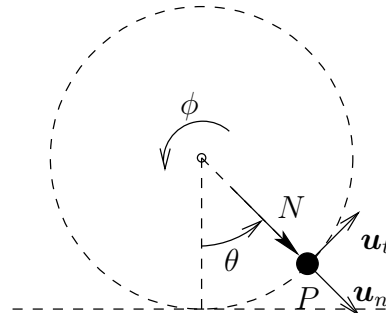


1. Calcular la reacción que la recta ejerce sobre el aro y la reacción que el aro ejerce sobre la partícula, en función de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.

1.º El sistema puede considerarse descompuesto como suma de dos subsistemas, el aro y la partícula:



Subsistema aro



Subsistema partícula

Establezcamos en primer lugar la ecuación que resulta de los momentos en el centro del aro para el subsistema aro:

$$\boxed{HR = mR^2\ddot{\phi}} \quad (1)$$

A continuación, la expresión que resulta de la fuerza normal al aro en el subsistema partícula:

$$N + mg \cos \theta = ma_{Pn}. \quad (2)$$

La aceleración de la partícula puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= -R\ddot{\phi} \mathbf{i} - R\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_n + R\ddot{\theta} \mathbf{u}_t \\ &= (-R\ddot{\phi} \sin \theta - R\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_n + (-R\ddot{\phi} \cos \theta + R\ddot{\theta}) \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (3)$$

$$= (-R\ddot{\phi} - R\dot{\theta}^2 \sin \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta) \mathbf{i} + (R\dot{\theta}^2 \cos \theta + R\ddot{\theta} \sin \theta) \mathbf{j}; \quad (4)$$

por lo que la ecuación (2) resulta

$$\boxed{N = -mg \cos \theta - mR\ddot{\phi} \sin \theta - mR\dot{\theta}^2} \quad (5)$$

La reacción V puede calcularse a partir de la ecuación que resulta de las fuerzas verticales en el sistema conjunto,

$$\boxed{V - 2mg = mR\dot{\theta}^2 \cos \theta + mR\ddot{\theta} \sin \theta} \quad (6)$$

2.- Planteamos la ecuación de fuerzas horizontales en el sistema conjunto,

$$H = -mR\ddot{\phi} + m(-R\ddot{\phi} - R\dot{\theta}^2 \sin \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta). \quad (7)$$

Eliminando H entre (1) y (7) resulta:

$$\boxed{3mR\ddot{\phi} = -mR\dot{\theta}^2 \sin \theta + mR\ddot{\theta} \cos \theta.} \quad (8)$$

Por último, planteamos la ecuación de fuerzas tangenciales al aro para el subsistema partícula,

$$\boxed{-mg \sin \theta = -mR\ddot{\phi} \cos \theta + mR\ddot{\theta}.} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) definen la dinámica del sistema.