Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

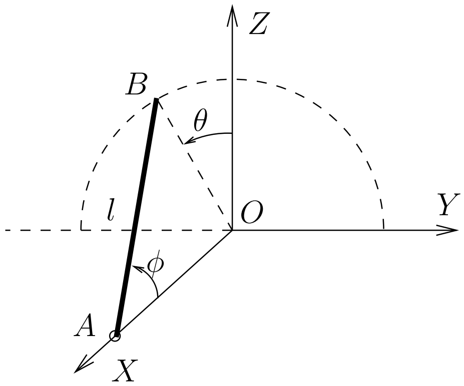
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Una barra AB de longitud l y masa m tiene su extremo A fijo, mientras que su extremo B se apoya en un plano rugoso vertical OYZ (ver figura adjunta). Se pide:

1. Suponiendo que la barra está deslizando, con un coeficiente de rozamiento dado μ, obtener la ecuación diferencial del movimiento.

2. Calcular el coeficiente de rozamiento μ necesario, en función de la posición, para que la barra se encuentre en equilibrio.

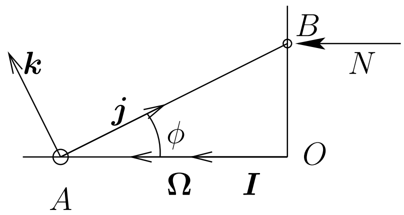


---

1. Se trata del movimiento de un sólido rígido con un punto fijo A. Se comprueba fácilmente que la barra sólo posee un grado de libertad θ dado que ϕ es constante a lo largo del movimiento. La ecuación del movimiento se obtiene a partir del principio del momento cinético en A:

$$\boldsymbol{M}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Se adopta un triedro del cuerpo con origen en A de manera que el eje y coincide con la barra AB en todo instante, el eje z está contenido en el plano OAB, y el eje x es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. En la figura se representa el plano OAB abatido, en verdadera magnitud.



La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la barra y el momento cinético $\boldsymbol{H}_A$ expresados en dichos ejes resultan:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{I} = \dot{\theta}(-\cos\phi\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{H}_A = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k}$$

De forma que, derivando,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_A = \\ &= \frac{1}{3}ml^2(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k} - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\boldsymbol{i}).\end{aligned} \tag{2}$$

Las fuerzas exteriores que producen momento en A en este caso son el peso $\boldsymbol{P}$, la reacción normal $\boldsymbol{N}$ en B y la fuerza de rozamiento $\boldsymbol{F}_R$, que expresadas en los ejes cuerpo resultan:

$$\boldsymbol{P} = -mg(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{N} = N(-\cos\phi\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{F}_R = \mu N\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\,\boldsymbol{i},$$

donde $\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$ define el signo de $\dot{\theta}$. La fuerza de rozamiento tiene necesariamente sentido opuesto a la velocidad de deslizamiento en B, de valor $-l \operatorname{sen}\phi \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$.

El momento en A resulta

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_{AG} \wedge \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r}_{AB} \wedge \boldsymbol{N} + \boldsymbol{r}_{AB} \wedge \boldsymbol{F}_R,$$

siendo $\boldsymbol{r}_{AG} = \frac{l}{2}\,\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{r}_{AB} = l\,\boldsymbol{j}$, de manera que

$$\boldsymbol{M}_A = (Nl \operatorname{sen}\phi - mg\frac{l}{2}\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\mu Nl)\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

Igualando componentes entre (2) y (3), resultan dos ecuaciones:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\mu Nl;$$
$$-\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi = Nl\operatorname{sen}\phi - mg\frac{l}{2}\cos\theta\cos\phi.$$

Eliminando de estas dos ecuaciones N se obtiene finalmente la ecuación diferencial del movimiento:

$$\boxed{\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\mu(mg\frac{l}{2}\cos\theta\cot\phi - \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2\cos\phi)} \tag{4}$$

2. Para la condición de equilibrio se debe verificar $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, por lo que resulta:

$$\boxed{\mu = \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\phi} \tag{5}$$