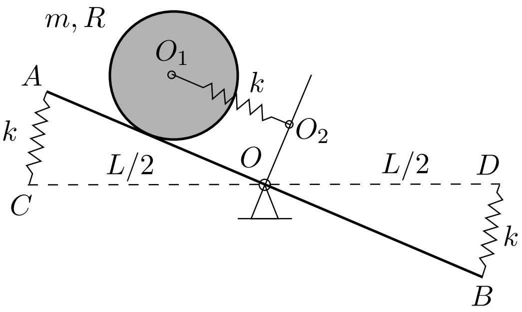
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 6.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 75 min.

Una barra de longitud $L = 2R\sqrt{2}$ y masa $M = 3m$ puede girar libremente alrededor de su punto central fijo O. Sobre esta barra rueda sin deslizar un disco de masa m y radio R. Los extremos A y B están unidos mediante sendos resortes iguales de constante k a dos puntos fijos C y D, equidistantes una distancia $L/2$ de O (ver figura adjunta). Además, el centro O_1 del disco está unido a un punto O_2, situado siempre a una altura R sobre el centro de la barra, mediante otro resorte de constante k. Todos los resortes tienen longitud natural nula, y el sistema se mueve siempre contenido en un plano vertical fijo. Además, se considera que el anclaje del punto O_2 no interfiere en el movimiento del disco.



Se pide:

1. Discutir la existencia de posiciones de equilibrio en función del valor de k.
2. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio para $k = mg/(2R)$.

1.– Denominamos θ al ángulo que define la barra AB con la horizontal, positivo en sentido horario, y x a la distancia $\overline{O_2O_1}$, con sentido positivo hacia el extremo A de la barra. En función de estas coordenadas la elongación del muelle unido al centro del disco es x y la de los muelles CA y DB es $\delta = L\,\mathrm{sen}(\theta/2)$.

El potencial del sistema tiene la expresión

$$V = 2\frac{1}{2}k\left(L\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgz_{O_1}; \tag{1}$$

considerando que $z_{O_1} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + R\cos\theta$, resulta

$$V = 4kR^2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 + mg(x\,\mathrm{sen}\,\theta + R\cos\theta). \tag{2}$$

Las posiciones de equilibrio corresponden a extremos de la función potencial:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} = kx + mg\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{mg}{k}\,\mathrm{sen}\,\theta; \tag{3}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 4kR^2\,\mathrm{sen}\,\theta + mgx\cos\theta - mgR\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{4}$$

Sustituyendo la condición (3) en (4) se obtiene la condición general de equilibrio en función de θ:

$$0 = 4kR^2 \operatorname{sen}\theta - \frac{(mg)^2}{k} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - mgR \operatorname{sen}\theta. \tag{5}$$

Esta ecuación tiene siempre la solución $\theta = 0$, que corresponde a $x = 0$. Eliminando esta solución, otras posibles posiciones de equilibrio vienen dadas por

$$0 = 4kR^2 - \frac{(mg)^2}{k} \cos\theta - mgR, \tag{6}$$

y despejando en esta ecuación,

$$\cos\theta = 4\left(\frac{kR}{mg}\right)^2 - \frac{kR}{mg}. \tag{7}$$

Podemos afirmar pues que existe siempre la posición de equilibrio ($x = 0, \theta = 0$), además de otras posibles soluciones definidas por (7), que caso de existir serán una pareja de soluciones, ya que $\cos\theta = \cos(-\theta)$. A continuación discutimos las condiciones de existencia.

Debe cumplirse $-1 \leq \cos\theta \leq +1$, por lo que, llamando $\beta = \frac{kR}{mg}$, resulta la condición $-1 \leq 4\beta^2 - \beta \leq +1$. Estudiando la función $f(\beta) = 4\beta^2 - \beta$, comprobamos fácilmente que $f(\beta) > -1\ \forall\beta$, y que $f(\beta) = +1$ para $\beta = (1 \pm \sqrt{17})/8$. Por tanto, y teniendo en cuenta que la constante de resorte es siempre $k > 0$, la condición de existencia de otras posiciones de equilibrio distintas de ($x = 0, \theta = 0$) es

$$\frac{kR}{mg} \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{8}. \tag{8}$$

2.– Para el valor dado de k resulta $\beta = \frac{kR}{mg} = \frac{1}{2}$, lo que entra dentro del intervalo definido por (8). Por tanto, además de la posición de equilibrio ($x = 0, \theta = 0$) existirá otra dada por

$$\cos\theta = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm 60^\circ.$$

Los valores de x concomitantes son, a partir de (3), $x = \mp R\sqrt{3}$.

Para discutir la estabilidad evaluamos las derivadas segundas de V,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial\theta} = mg\cos\theta; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 4kR^2\cos\theta - mgx\operatorname{sen}\theta - mgR\cos\theta. \tag{9}$$

Las matrices del Hessiano para las posiciones de equilibrio resultan, considerando el valor de k dado en el enunciado,

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} \frac{mg}{2R} & mg \\ mg & mgR \end{bmatrix}; \quad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{\theta=\pm 60^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{mg}{2R} & \frac{mg}{2} \\ \frac{mg}{2} & 2mgR \end{bmatrix}. \tag{10}$$

En el primer caso ($\theta = 0$), el determinante es negativo por lo que el equilibrio es inestable. En el segundo caso el determinante es positivo, por lo que resulta estable para cualquiera de las dos posiciones simétricas $\theta = \pm 60^\circ$.