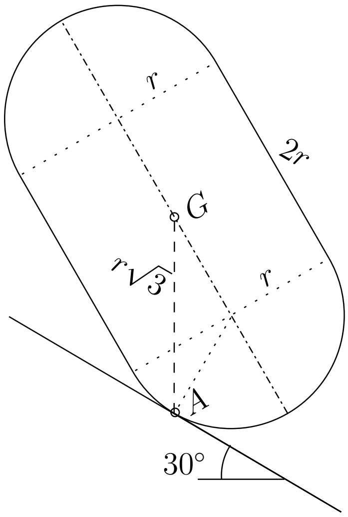
Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (8 de abril de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/20) Tiempo: 60 min.

Un sólido $\mathcal{S}$ homogéneo y pesado, de densidad μ, está formado por un cilindro recto de revolución (radio r y altura $2r$) en cuyas bases van soldadas sendas semiesferas (de radio r). El movimiento de $\mathcal{S}$ viene restringido por ligaduras que hacen que un punto determinado A de su superficie, que dista $r\sqrt{3}$ del centro de masa G, permanezca sobre un tablero liso e inclinado, que forma 30° con el plano horizontal. En el instante inicial del movimiento, G se encuentra sobre la vertical de A y tiene una velocidad horizontal v_0.



Se pide:

1. Definir el número n de grados de libertad de $\mathcal{S}$, estableciendo los parámetros independientes adecuados para estudiar el movimiento. ¿Qué clase de movimiento es?
2. Escribir, siguiendo los procedimientos de Newton-Euler, las n ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento de $\mathcal{S}$.
3. Plantear las ecuaciones que permiten obtener las reacciones que restringen el movimiento de $\mathcal{S}$.
4. ¿Qué teoremas generales de conservación son aplicables?
5. Integrar las ecuaciones del movimiento, obteniendo la trayectoria de G y el valor de la velocidad angular $\mathbf{\Omega}(t)$

1.– El punto A no puede abandonar el tablero, lo que supone la pérdida de un grado de libertad. Como el punto de $\mathcal{S}$ en contacto con el tablero debe ser siempre el mismo (A) deducimos que está impedida la rodadura en este contacto, porque si la hubiere, iría cambiando dicho punto de contacto. Esto supone que la rotación de $\mathcal{S}$ sólo puede tener componente de pivotamiento, con lo que se pierden otros dos grados de libertad (las dos posibles componentes, sobre el plano del tablero, de la rotación de rodadura). Nos queda que $\mathcal{S}$ tiene tres grados de libertad ($n = 6 - 3$).

Los primeros parámetros que probablemente se nos ocurran serían: las dos coordenadas de A sobre el plano del tablero (que podemos llamar (X_A, Y_A), si adoptamos unos ejes fijos OX, OY contenidos en él) y el ángulo ϕ girado en el pivotamiento alrededor de la normal OZ a dicho tablero.

Si observamos que la dirección de la rotación $\mathbf{\Omega}$ de $\mathcal{S}$ es constante (la de OZ), al tiempo que la velocidad de A permanece en el plano OXY, concluimos que el movimiento de $\mathcal{S}$

es plano, manteniéndose cualquier punto $Q \in \mathcal{S}$ en un plano dado paralelo al OXY. En particular, G permanecerá sobre un plano paralelo a la distancia $r\sqrt{3}\cos 30° = (3/2)r$ (el ángulo formado por la AG con la normal al plano es constante e igual a 30°).

Teniendo en cuenta esta circunstancia, podemos caer en la cuenta de que resultará más ventajoso, pensando en las ecuaciones del movimiento, adoptar como parámetros las coordenadas del centro de masa (X_G, Y_G) en lugar de las de A, manteniendo como tercer parámetro el ángulo ϕ. Las direcciones más adecuadas para los ejes son la horizontal del tablero (por ejemplo, la OX) y la de máxima pendiente del mismo (por ejemplo, la OY, en sentido descendente). El eje OZ normal al tablero lo tomaremos positivo hacia arriba.

2.– El sólido está sometido a las fuerzas siguientes:

- Su peso $\boldsymbol{P} = mg(\operatorname{sen} 30° \,\boldsymbol{J} - mg\cos 30° \,\boldsymbol{K})$;
- La reacción normal del tablero que impide que se separe de él, $\boldsymbol{R} = R\,\boldsymbol{K}$;
- Los pares de reacción que impiden la rodadura, $\boldsymbol{M} = M_X\,\boldsymbol{I} + M_Y\,\boldsymbol{J}$.

El teorema del centro de masa proporciona dos ecuaciones del movimiento, proyectando según las direcciones X, Y respectivamente:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X_G}{\mathrm{d}t^2} = 0; \tag{1}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 Y_G}{\mathrm{d}t^2} = mg\operatorname{sen} 30°. \tag{2}$$

El principio del momento cinético en G establece que

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{r}_{GA} \wedge \boldsymbol{R} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G. \tag{3}$$

Comprobamos fácilmente que $M_{GZ} = 0$ (el momento de la reacción $R\,\boldsymbol{K}$ es normal a $\boldsymbol{K}$), por lo que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_{GZ} = 0$. Pero la dirección invariable de la rotación GZ coincidirá también con una recta material dada Gz de $\mathcal{S}$, por lo que adoptaremos ésta como uno de los ejes del triedro del cuerpo, aunque no sea principal de inercia; el hecho de que $\boldsymbol{\Omega}$ lleve permanentemente esa dirección la hace más interesante que las del triedro principal. Tomaremos como eje Gx el perpendicular al plano determinado por Gz y el eje de revolución de $\mathcal{S}$, y Gy normal a los otros dos. El eje Gx será principal, al ser normal a un eje de revolución y por tanto de simetría. El plano Gxy se mantiene paralelo al fijo OXY, siendo el ángulo girado $\widehat{Xx} = \widehat{Yy} = \phi$. El tensor central de inercia tendrá como componentes en estos ejes del cuerpo

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -P_{yz} \\ 0 & -P_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

por lo que el momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}\cdot\Omega\,\boldsymbol{k} = -P_{yz}\Omega\,\boldsymbol{j} + I_{zz}\Omega\,\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

La derivada es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_G = -P_{yz}\dot{\Omega}\,\boldsymbol{j} + I_{zz}\dot{\Omega}\,\boldsymbol{k} + P_{yz}\Omega^2\,\boldsymbol{i}. \tag{6}$$

La ecuación que falta del movimiento es por tanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_{GZ} = I_{zz}\dot{\Omega} = 0 \quad\Rightarrow\quad \Omega = \dot{\phi} = \text{cte}. \tag{7}$$

3.– Las reacciones intervienen en las tres ecuaciones de la dinámica que no nos han interesado para estudiar el movimiento, primeramente la del teorema del centro de masa según Z:

$$R - mg\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{5}{\sqrt{3}}\pi r^3 \mu g. \tag{8}$$

Las componentes de $\boldsymbol{r}_{GA}$ en el triedro del cuerpo son

$$\boldsymbol{r}_{GA} = r\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,30^\circ\,\boldsymbol{j} - r\sqrt{3}\cos 30^\circ\,\boldsymbol{k},$$

Lo que nos permite evaluar las componentes x e y (direcciones móviles) de la ecuación vectorial (3):

$$M_x = P_{yz}\Omega^2 + Rr\frac{\sqrt{3}}{2}; \tag{9}$$

$$M_y = 0. \tag{10}$$

En estas ecuaciones (M_x, M_y) son los pares de reacción para mantener la ligadura que impide la rodadura, según las direcciones móviles con el cuerpo (x, y) respectivamente. Como puede comprobarse, estas componentes resultan más convenientes que las referidas a direcciones fijas (M_X, M_Y).

4.– De la ecuación (1) se sigue la conservación de la cantidad de movimiento según X, lo que considerando la condición inicial del enunciado conduce a:

$$\dot{X}_G = v_0. \tag{11}$$

Asimismo, se conserva el momento cinético en G según z, lo que ya se expresó en la ecuación (7). La constante, a partir de la condición inicial del enunciado, es

$$\Omega = \dot{\phi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{r}. \tag{12}$$

Por último, las fuerzas activas son conservativas y las reacciones no trabajan, por lo que se conserva la energía:

$$\frac{1}{2}m(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2) + \frac{1}{2}I_{zz}\Omega^2 + mgY_G\,\mathrm{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\frac{4}{3}\frac{v_0^2}{r^2} \tag{13}$$

(suponiendo que en el instante inicial $X_G|_0 = Y_G|_0 = 0$).

5.– Es inmediato ver, a partir de (1) y (2), que G describirá una parábola en el plano paralelo al tablero, con un valor equivalente de la gravedad $g' = g\,\mathrm{sen}\,30^\circ = g/2$:

$$X_G = v_0 t; \quad Y_G = \frac{1}{2}g't^2 = \frac{1}{4}gt^2. \tag{14}$$

Por otra parte, la orientación del sólido viene dada por

$$\phi = \Omega t = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{r}t.$$