Mecánica

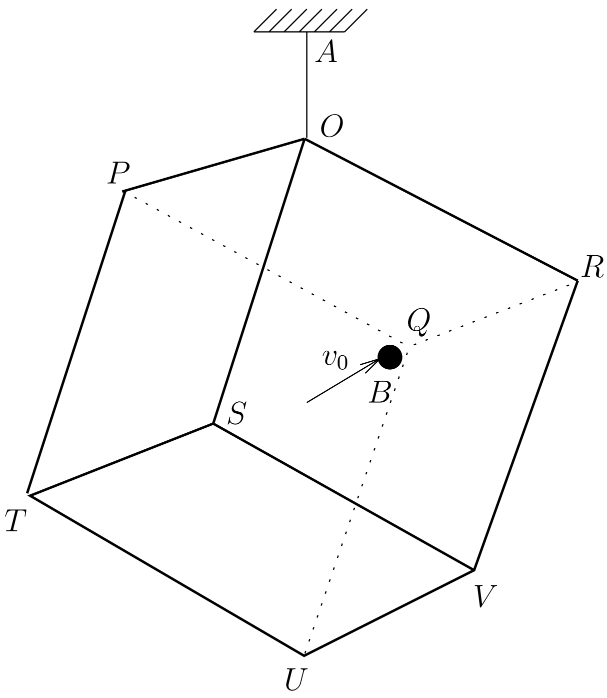
3.er EXAMEN PARCIAL (8 de abril de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/20) Tiempo: 60 min.

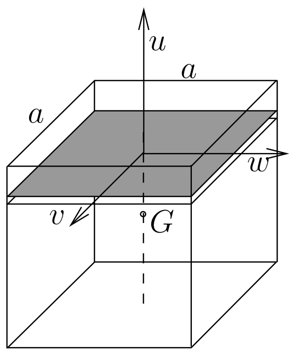
Un hexaedro regular, de masa m y lado a, cuyos vértices son $OPQRSTUV$ está colgado de su vértice O a un punto fijo A mediante un hilo inextensible y sin masa (ver figura). El cubo está en reposo y una masa puntual m impacta en el punto B del mismo, que es el centro de la cara $OSVR$, con velocidad horizontal y paralela al plano vertical $OSUQ$, de módulo v_0. En el impacto la partícula queda completamente adherida al punto B.
Se pide:

1. Deducir el tensor central de inercia del cubo referido a ejes paralelos a las aristas.
2. Campo de velocidades del cubo en el instante inmediatamente posterior al impacto.
3. Percusión que se produce en el hilo como consecuencia del choque.



1.– El momento de inercia respecto del eje u del elemento diferencial de la figura es:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I_{uu} &= \mathrm{d}I_{vv} + \mathrm{d}I_{ww} = 2\mathrm{d}I_{ww}\\ &= 2\rho \mathrm{d}u \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}w \int_{-a/2}^{a/2} v^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{6}\rho a^4 \mathrm{d}u\end{aligned}$$



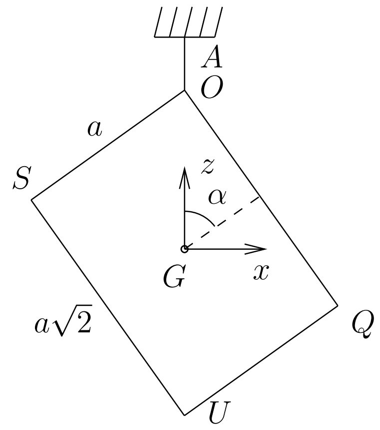
Integrando:

$$I_{uu} = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{6}\rho a^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{6}\rho a^5 = \frac{1}{6} m a^2$$

Por las simetrías existentes, los momentos de inercia respecto de las otras dos direcciones de la figura son iguales ($I_{uu} = I_{vv} = I_{ww}$), siendo además las tres direcciones principales de inercia. El tensor central de inercia es por tanto esférico, siendo sus componentes en cualquier triedro

$$[\boldsymbol{I}_G] = \frac{1}{6} m a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

2.– Sean $\boldsymbol{v}'$ y $\boldsymbol{v}_G$ las velocidades de la partícula y del centro de masas del cubo respectivamente después de la impulsión, y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular que adquiere el cubo. Llamaremos $\boldsymbol{R}$ a la impulsión reactiva debida al hilo, que necesariamente llevará la dirección (vertical) de OA, caso de existir. (El hilo sólo puede producir una reacción ascendente, en caso contrario se arrugaría; esta condición debemos comprobarla al final del cálculo.) Tomamos un sistema de referencia $Gxyz$ tal que el eje Gx es horizontal y contenido en la sección principal $OSUQ$ (es decir, según la dirección de la velocidad inicial de la partícula); el eje Gz es vertical ascendente, y el eje Gy es perpendicular a $OSUQ$ de modo que el triedro $Gxyz$ sea dextrógiro (es decir, hacia dentro del papel en la figura). Aunque las direcciones de este triedro no sean paralelas a las aristas, esto no representa inconveniente alguno ya que el tensor de inercia es esférico, por lo que todas las direcciones son principales.



$(\cos\alpha = 1/\sqrt{3})$

La expresión del balance de la cantidad de movimiento para el sistema cubo+partícula es

$$mv_0\,\boldsymbol{i} + R\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{v}_G + m\boldsymbol{v}'. \tag{2}$$

Al quedar la partícula adherida al punto B, después de la impulsión su velocidad se puede expresar mediante el campo de velocidades del cubo:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{GB}. \tag{3}$$

Mediante consideraciones geométricas se deduce

$$\boldsymbol{r}_{GB} = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right). \tag{4}$$

Por otra parte, es fácil deducir que $\boldsymbol{v}_G$ es necesariamente horizontal. En efecto, la velocidad de O debe ser horizontal debido a la coacción del hilo. Dado que el vector que une ambos puntos ($\boldsymbol{r}_{OG}$) es vertical, se sigue que $\boldsymbol{v}_G$ tampoco puede tener componente vertical:

$$v_{Gz} = 0. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta (3), (4) y (5) el desarrollo de (2) conduce a tres ecuaciones escalares:

$$mv_0 = mv_{Gx} + m\left(v_{Gx} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\Omega_y + \frac{a}{2\sqrt{2}}\Omega_z\right); \tag{6}$$

$$0 = mv_{Gy} + m\left(v_{Gy} - \frac{a}{2\sqrt{6}}\Omega_z - \frac{a}{2\sqrt{3}}\Omega_x\right); \tag{7}$$

$$R = m\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}\Omega_x + \frac{a}{2\sqrt{6}}\Omega_y\right). \tag{8}$$

Planteamos ahora el balance del momento cinético del cubo. Para ello calculamos en primer lugar la impulsión $\boldsymbol{P}$ de la partícula sobre el mismo, mediante el balance de cantidad de movimiento del cubo:

$$\boldsymbol{P} + R\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{v}_G \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G - R\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

El balance del momento cinético en G conduce a:

$$\boldsymbol{r}_{GB} \wedge (m\boldsymbol{v}_G - R\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{10}$$

Desarrollando esta ecuación vectorial, se obtiene:

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}R - \frac{a}{2\sqrt{3}}mv_{Gy} = \frac{1}{6}ma^2\Omega_x; \tag{11}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{3}}mv_{Gx} - \frac{a}{2\sqrt{6}}R = \frac{1}{6}ma^2\Omega_y; \tag{12}$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{6}}mv_{Gy} + \frac{a}{2\sqrt{2}}mv_{Gx} = \frac{1}{6}ma^2\Omega_z. \tag{13}$$

De las ecuaciones (6-8) podemos despejar:

$$R = -\frac{1}{2\sqrt{2}}ma\Omega_x + \frac{1}{2\sqrt{6}}ma\Omega_y; \tag{14}$$

$$v_{Gx} = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{4\sqrt{3}}a\Omega_y - \frac{1}{4\sqrt{2}}a\Omega_z; \tag{15}$$

$$v_{Gy} = \frac{1}{4\sqrt{3}}a\Omega_x + \frac{1}{4\sqrt{6}}a\Omega_z; \tag{16}$$

Eliminando (R, v_{Gx}, v_{Gy}) mediante (14-16) en (11-13) se obtiene:

$$-\frac{1}{6}ma^2\Omega_x + \frac{1}{8\sqrt{3}}ma^2\Omega_y - \frac{1}{24\sqrt{2}}ma^2\Omega_z = \frac{1}{6}ma^2\Omega_x; \tag{17}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}mv_0 + \frac{1}{8\sqrt{3}}ma^2\Omega_x - \frac{1}{12}ma^2\Omega_y - \frac{1}{8\sqrt{6}}ma^2\Omega_z = \frac{1}{6}ma^2\Omega_y; \tag{18}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}mv_0 - \frac{1}{24\sqrt{2}}ma^2\Omega_x - \frac{1}{8\sqrt{6}}ma^2\Omega_y - \frac{1}{12}ma^2\Omega_z = \frac{1}{6}ma^2\Omega_z; \tag{19}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones se obtiene:

$$\Omega_x = \frac{1}{21}\frac{v_0}{a}; \quad \Omega_y = \frac{17\sqrt{3}}{63}\frac{v_0}{a}; \quad \Omega_z = \frac{3\sqrt{2}}{7}\frac{v_0}{a}. \tag{20}$$

Sustituyendo estos valores en (15) y (16) resulta:

$$v_{Gx} = \frac{41}{126}v_0; \quad v_{Gy} = \frac{5\sqrt{3}}{126}v_0. \tag{21}$$

3.– La reacción en el hilo resulta de sustituir los valores (20) en (14), resultando

$$R = \frac{1}{9\sqrt{2}}mv_0. \tag{22}$$

Comprobamos que produce una tracción en el hilo, por lo que la hipótesis hecha es válida.