# Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL (13 de junio de 2000)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 1.º* (puntuación: 10) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

---

Un sólido $\mathcal{S}$ de revolución, con un punto fijo $O$ de su eje, está girando con velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ constante conocida. El tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ es también conocido. *Determinar* el valor del momento $\boldsymbol{M}_O$ que es necesario aplicar para obtener el movimiento descrito, así como su derivada $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O$ y la derivada de su módulo, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{M}_O|$. (sólo final (4/10))

Elegimos unos ejes $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ligados a $\mathcal{S}$, de forma que $\boldsymbol{k}$ sea el de revolución. Estos ejes son principales de inercia, por lo que el tensor de inercia será $\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Si $\boldsymbol{\Omega}$ es constante en sentido absoluto, también lo es respecto al sólido $\mathcal{S}$, por lo que sus componentes $(p, q, r)$ respecto al triedro del cuerpo son constantes. El momento cinético es asimismo constante en esta referencia, $\boldsymbol{H}_O = (Ap, Aq, Cr)$, y su derivada proviene de la rotación $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_O = (C - A)r(q\,\boldsymbol{i} - p\,\boldsymbol{j}).$$

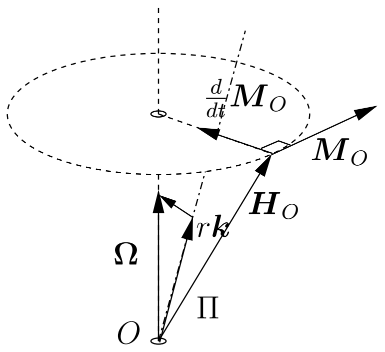
De esta expresión comprobamos que las componentes de $\boldsymbol{M}_O$ en el triedro del cuerpo también son constantes, por lo que su módulo será invariable,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{M}_O| = 0,$$

y la derivada valdrá

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{M}_O = (C - A)\left[r^2(p\,\boldsymbol{i} + q\,\boldsymbol{j}) - r(p^2 + q^2)\boldsymbol{k}\right].$$

Geométricamente podemos observar que tanto $\boldsymbol{\Omega}$ como $\boldsymbol{H}_O$ pertenecen al plano $\Pi$ formado por los dos vectores $(p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j})$ y $r\boldsymbol{k}$. Este es un plano móvil con el sólido, cuya normal es $(q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j})$, y gira con el mismo alrededor del eje de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. En consecuencia $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_O$ es perpendicular a este plano, y por tanto perpendicular a $r\boldsymbol{k}$. La derivada $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O$ vuelve a pertenecer al plano dicho, orientada hacia el eje $\boldsymbol{\Omega}$.



Mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales, *deducir* las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sólido rígido en un caso general. (2P (5/10) y final (3/10)):

Sea un sólido rígido formado por un conjunto de masas discretas $\{m_i, i = 1, \ldots, N\}$. El principio de los trabajos virtuales afirma:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\}_{\text{comp}}. \tag{1}$$

Los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces internos del sólido rígido se pueden expresar como $\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i$, siendo $\delta \boldsymbol{r}_O$ el desplazamiento de un punto dado $O$ del sólido y $\delta \boldsymbol{\varphi}$ una rotación infinitesimal, ambos arbitrarios en un sólido rígido libre de restricciones. Sustituyendo en (1) y operando,

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i) \\ &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_O + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \\ &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i$ y $\boldsymbol{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i$. Al ser $\delta \boldsymbol{r}_O$ y $\delta \boldsymbol{\varphi}$ arbitrarios, se deducen las condiciones pedidas:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}}. \tag{3}$$

---

Método de Routh: para un sistema con coordenadas $\{q_j, j = 1, \ldots n\}$ de las cuales las $k$ primeras son cíclicas, del que se conoce la Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, *definir* la función Routhiana, y desarrollar las ecuaciones de Routh. (2P (5/10) y final (3/10)):

La condición de coordenadas cíclicas establece:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad , \ i = 1, \ldots, k \quad (c_i \text{ constantes}). \tag{4}$$

La función Routhiana se define como la transformada de Legendre de la Hamiltoniana respecto de las velocidades generalizadas correspondientes a las coordenadas cíclicas, es decir:

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{k} c_i \dot{q}_i - L.} \tag{5}$$

Además, deberá expresarse en función de los siguientes parámetros y variables:

$$R(c_1, \ldots, c_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \ldots, \dot{q}_n, t).$$

De la expresión (5) se deduce fácilmente que $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$; $\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$, $i = k+1, \ldots, n$. Por tanto, sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange éstas quedan reducidas a las correspondientes a las coordenadas no cíclicas:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = k+1, \ldots, n.} \tag{6}$$

Mediante el método de Routh se pueden estudiar las perturbaciones de movimientos con trayectorias estables alrededor de las mismas, caracterizadas por coordenadas cíclicas, obteniéndose ecuaciones únicamente para los grados de libertad adicionales que definan dichas perturbaciones.