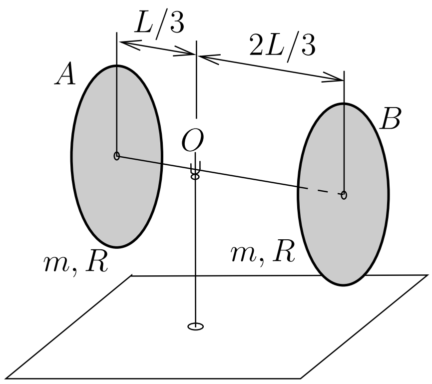
Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema formado por dos discos iguales de masa m y radio R cuyos centros se encuentran unidos perpendicularmente mediante una varilla de longitud L y masa despreciable. Uno de los discos (A) puede girar libremente alrededor del eje de la varilla, mientras que el otro (B) se encuentra soldado a la varilla por su centro. Se considera que en todo instante el giro del disco B alrededor de la varilla es nulo, y que a su vez la varilla no gira alrededor de su propio eje.



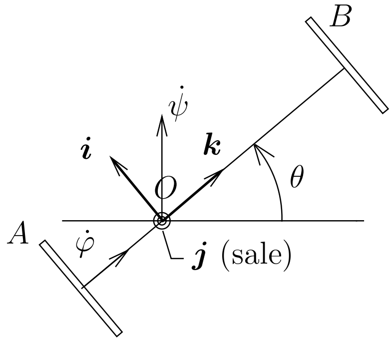
El conjunto formado por la varilla y los discos se apoya sin rozamiento sobre un soporte fijo articulado que permite tanto el balanceo de la varilla (inclinación respecto del plano horizontal) como su movimiento de precesión alrededor del eje del apoyo (ver figura adjunta). El punto de apoyo O en la varilla se encuentra en todo momento a una distancia $L/3$ del disco A y $2L/3$ del disco B.

Se pide:

1. Expresar las ecuaciones diferenciales de segundo orden que gobiernan el movimiento del sistema.
2. Expresar las posibles integrales primeras del movimiento.
3. Calcular el valor de la velocidad de rotación del disco A alrededor del eje de la varilla (ω) para que el movimiento resultante sea tal que la precesión del conjunto sea constante con la varilla siempre horizontal.

1.- Un procedimiento para obtener las ecuaciones de segundo orden del movimiento es emplear la metodología de la mecánica analítica.

Consideramos un sistema móvil auxiliar $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que el eje $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla y el eje $\boldsymbol{j}$ es en todo momento horizontal y perpendicular a ésta (ver figura adjunta). La velocidad angular de los discos se expresan en el sistema móvil como:



$$\boldsymbol{\Omega}_A = \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{j} + (\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\varphi})\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\Omega}_B = \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$$

Estas dos velocidades difieren únicamente en la rotación propia que sólo posee el disco A.

Teniendo en cuenta que el punto O es fijo, la expresión general de la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_A \cdot (\boldsymbol{I}_O)_A \cdot \boldsymbol{\Omega}_A + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_B \cdot (\boldsymbol{I}_O)_B \cdot \boldsymbol{\Omega}_B - V_{\text{peso}}$$

Teniendo en cuenta que tanto $(\boldsymbol{I}_O)_A$ como $(\mathbf{I}_O)_B$ son tensores cilíndricos de la forma:

$$(\boldsymbol{I}_O)_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad ; \quad (\boldsymbol{I}_O)_B = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

con $A = m(R^2/4 + L^2/9)$, $A' = m(R^2/4 + 4L^2/9)$ y $C = mR^2/2$, se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}(A + A')(\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(2\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta) - \frac{mgL}{3}\operatorname{sen}\theta$$

Las ecuaciones de Lagrange correspondientes tienen la expresión:

$$\ddot{\psi}\left[(A + A')\cos^2\theta + 2C\operatorname{sen}^2\theta\right] + \ddot{\varphi}C\operatorname{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}2\theta\,[2C - (A + A')] + \dot{\varphi}\dot{\theta}C\cos\theta = 0 \quad (1)$$

$$C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{\theta}(A + A') - \dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,[2C - (A + A')] - \dot{\psi}\dot{\varphi}C\cos\theta + \frac{mgL}{3}\cos\theta = 0 \quad (3)$$

Una forma alternativa de obtener las ecuaciones del movimiento consiste en aplicar las ecuaciones de Newton-Euler . En este caso, se obtienen tres ecuaciones escalares planteando el principio del momento cinético en O al conjunto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\boldsymbol{I}_O)_A \cdot \boldsymbol{\Omega}_A + (\boldsymbol{I}_O)_B \cdot \boldsymbol{\Omega}_B\right] = \boldsymbol{M}_O \quad (4)$$

La derivada absoluta se realiza ayudándose del sistema móvil $(\cdot)_{\text{abs}} = (\cdot)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} \wedge (\cdot)$, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\Omega}_B$. El momento de las fuerzas $\boldsymbol{M}_O$ se compone de dos términos, uno debido al peso ($\boldsymbol{M}_{O1} = -(mgL/3)\cos\theta\,\boldsymbol{j}$) y otro debido a la coacción del soporte que impide el giro propio del eje AB ($\boldsymbol{M}_{O2}$). Este último término es horizontal, ya que el giro alrededor de la vertical que pasa por O no está impedido, por lo que $\boldsymbol{M}_{O2} = M(-\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{k})$, siendo M una reacción incógnita a determinar. Las ecuaciones (4) junto con la constancia de la componente según $\boldsymbol{k}$ de la velocidad de rotación del disco A permite obtener tres ecuaciones equivalentes a (1), (2), (3).

2.- La coordenada ψ es cíclica, por lo que una integral primera es:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \dot{\psi}\left[(A + A')\cos^2\theta + 2C\operatorname{sen}^2\theta\right] + \dot{\varphi}C\operatorname{sen}\theta = cte. \quad (5)$$

que físicamente se interpreta como la conservación de la componente vertical (absoluta) del momento cinético del conjunto.

También la variable φ es cíclica, por lo que se obtiene otra integral primera:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = C(\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\varphi}) = cte. \quad (6)$$

que representa la conservación de la componente según el eje $\boldsymbol{k}$ móvil del momento cinético del disco A.

Por último, al ser todas las fuerzas activas conservativas y no haber enlaces rugosos, la energía total se conserva:

$$\frac{1}{2}(A + A')(\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta) + \frac{mgL}{3}\operatorname{sen}\theta = E = cte. \quad (7)$$

3.- En realidad hubiera sido posible definir este movimiento diciendo únicamente que la varilla se mantiene siempre horizontal. De la expresión (5) se deduce que la velocidad de precesión debe mantenerse constante ($\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$).

De la ecuación (6) se deduce que la velocidad de rotación propia del disco A también debe ser constante ($\dot{\varphi} = \omega$).

Por último, la ecuación (3) nos proporciona su valor:

$$\omega = \frac{mgL}{3C\dot{\psi}_0} = \frac{2gL}{3R^2\dot{\psi}_0}$$