

Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos

Nombre

N.º

Grupo

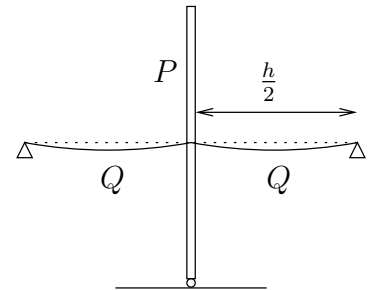
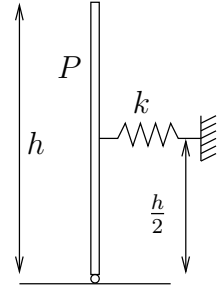
--	--	--	--

Ejercicio 3.º (puntuación: 10)

Tiempo: 45 min.

Un poste rígido de peso P y altura h está colocado verticalmente, apoyado en su base mediante una articulación que permite el giro libre en un plano vertical y estabilizado mediante dos cables simétricos inextensibles anclados a una altura $h/2$ en el poste. Se pide:

- Admitiendo que, para pequeños desplazamientos del poste, el efecto conjunto de los dos cables equivale a un resorte lineal de acción horizontal y constante k , calcular el valor que debe tener esta constante para que el equilibrio sea estable.
- El peso de cada cable es $Q = P/100$, su anclaje en el terreno está situado a una distancia $h/2$ y se tensan de forma que la tensión horizontal en cada uno vale $H = P/10$. Calcular el valor de la rigidez k que proporciona la pareja de cables frente a desplazamientos horizontales de su anclaje en el poste, comprobando si el sistema resulta estable.



1.— Denominando θ al ángulo que forma el poste con respecto a la posición de equilibrio vertical, el potencial del sistema puede expresarse como:

$$V = P \frac{h}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k \left(\frac{h}{2} \sin \theta \right)^2. \quad (1)$$

La primera derivada es

$$\frac{dV}{d\theta} = -P \frac{h}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} k \left(\frac{h}{2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2)$$

donde comprobamos que $\theta = 0$ es una posición de equilibrio. Derivando de nuevo para estudiar su estabilidad,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -P \frac{h}{2} \cos \theta + k \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cos(2\theta). \quad (3)$$

Imponiendo que $d^2V/d\theta^2 > 0$ para $\theta = 0$ se deduce la condición pedida:

$$\boxed{k > \frac{2P}{h}}. \quad (4)$$

2.— Llamaremos $b = h/2$ a la luz de cada cable. Al producirse un desplazamiento elemental del poste, el punto de anclaje de cada cable se desliza horizontalmente (db), aunque su longitud (S) se mantiene constante. Este desplazamiento producirá una variación de su tensión horizontal, dH . La rigidez del sistema de los dos cables es $2dH/db$, valor que evaluaremos calculando en primer lugar da/db . Para ello se parte de la ecuación que expresa la longitud del cable,

$$S = 2a \operatorname{senh} \left(\frac{b/2}{a} \right), \quad (5)$$

siendo

$$a = \frac{H}{Q/S}. \quad (6)$$

Derivando (5) respecto a b :

$$0 = 2 \frac{da}{db} \operatorname{senh} \left(\frac{b/2}{a} \right) + 2a \frac{(1/2)a - (b/2)da/db}{a^2} \operatorname{cosh} \left(\frac{b/2}{a} \right), \quad (7)$$

de donde se despeja

$$\frac{da}{db} = \frac{1/2}{\frac{b/2}{a} - \operatorname{tgh} \left(\frac{b/2}{a} \right)}. \quad (8)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (6) y (5), se llega a

$$\frac{Q}{2H} = \operatorname{senh} \left(\frac{b/2}{a} \right) \Rightarrow a = \frac{b/2}{\operatorname{argsenh} \left(\frac{Q}{2H} \right)} = 10,004b. \quad (9)$$

Por último, derivando (6) se deduce

$$\frac{da}{db} = \frac{S}{Q} \frac{dH}{db} = \frac{a}{H} \frac{dH}{db}. \quad (10)$$

La rigidez del conjunto es $k = 2 \frac{dH}{db}$, que teniendo en cuenta (10), (8) y (9) resulta

$$k = 2404,4 \frac{H}{b} = 240,44 \frac{P}{b}, \quad (11)$$

por lo que se cumple sobradamente la condición (4) y el equilibrio es estable.