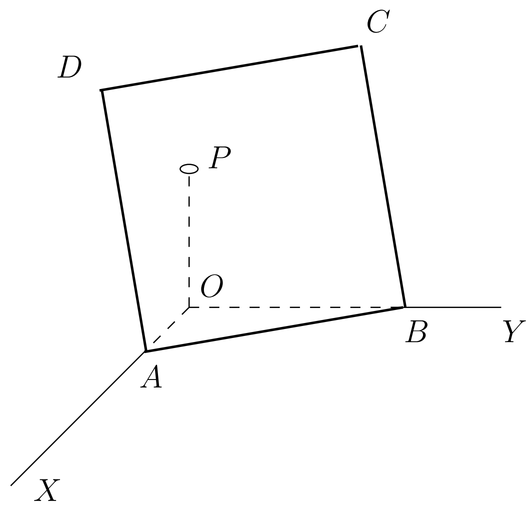
Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10) Tiempo: 60 min.

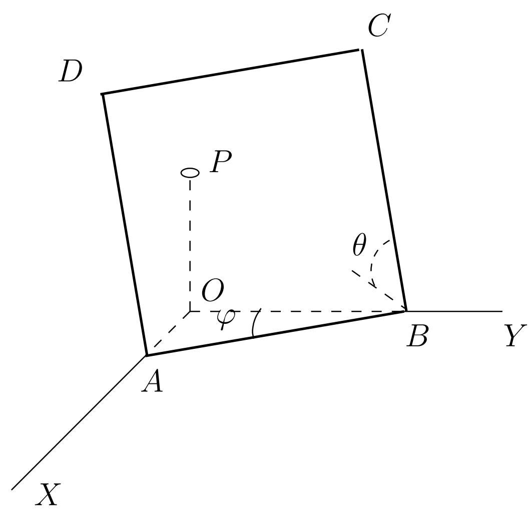
Una placa cuadrada $ABCD$ de lado $2a$ se mueve de modo que su vertice A está en el eje OX (ver figura) y el vertice B está en el eje OY. Además la placa se apoya sobre un punto fijo P situado en el eje OZ a una distancia a de O. Además de los ejes fijos $OXYZ$ se consideran unos ejes móviles $Axyz$ tal que Ax está sobre AB y Ay sobre AD. Se pide:



1. Determinar el número de grados de libertad del movimiento de la placa $ABCD$ y definir claramente los parámetros necesarios para expresar la posición de dicha placa
2. Expresión de la velocidad angular de la placa en los ejes fijos $OXYZ$ y en los ejes móviles $Axyz$
3. Expresión de la aceleración angular de la placa, expresada en los ejes $Axyz$, particularizando su expresión para el instante en que AB forma 45° con OX
4. Expresión de la velocidad y aceleración del centro de la placa en el mismo instante que se ha considerado para el apartado anterior

---

1. La placa tiene un grado de libertad. Para comprenderlo basta con razonar que el enlace en A restringe dos grados de libertad, el de B otros dos, y el apoyo en P uno más; un total de 5 sobre los 6 grados de libertad del sólido libre. Para definir su posición se empleará el ángulo φ que forma el lado AB con el eje OY (ver figura). El ángulo θ de la figura, que representa la máxima pendiente, está completamente determinado para un valor dado de φ, por lo que no constituye un grado de libertad adicional.



2. Llamando $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ a los versores del sistema de referencia fijo, e $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ a los del sistema móvil, la velocidad angular se puede expresar:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} \tag{1}$$

siendo θ el ángulo que forma el plano de la placa con el plano OXY (ver figura). Como únicamente hay un grado de libertad, los ángulos $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ están relacionados. Dicha relación se obtiene con las distancias OP y OM (siendo M el pie de la perpendicular de O al lado AB):

$$\tan\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{2a\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi} \tag{2}$$

Derivando (2):

$$\dot{\theta}\frac{1}{\cos^2\theta} = -\frac{2\dot{\varphi}\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} \tag{3}$$

y eliminando de esta expresión θ en favor de φ mediante (2), se obtiene:

$$\dot{\theta} = -\frac{2\dot{\varphi}\cos 2\varphi}{1+\sin^2 2\varphi} \tag{4}$$

Por último es necesario expresar los versores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{K}$ en los sistemas fijo y movil, respectivamente:

$$\boldsymbol{i} = -\sin\varphi\boldsymbol{I} + \cos\varphi\boldsymbol{J} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K} = \sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k} \tag{6}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1) se obtiene la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en los ejes fijos:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{\varphi}\cos 2\varphi}{1+\sin^2 2\varphi}\left(-\sin\varphi\boldsymbol{I} + \cos\varphi\boldsymbol{J}\right) + \dot{\varphi}\boldsymbol{K} \tag{7}$$

Sustituyendo (4) y (6) en (1) se obtiene la expresión en los ejes móviles:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{\varphi}\cos 2\varphi}{1+\sin^2 2\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}}\boldsymbol{j} + \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}}\boldsymbol{k}\right) \tag{8}$$

3. Para obtener la aceleración angular es necesario derivar la expresión genérica de $\boldsymbol{\Omega}$ y particularizar posteriormente para $\varphi = \pi/4$. De (2) se deduce que en $\varphi = \pi/4$ también $\theta = \pi/4$. Teniendo en cuenta que la derivada absoluta coincide con la derivada relativa en los ejes móviles:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} \tag{9}$$

basta con derivar las componentes de (8) y particularizar, para obtener finalmente:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 2\dot{\varphi}^2\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{\varphi}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{10}$$

4. Sea N el centro de la placa. Su velocidad se puede expresar en términos de la velocidad de A:

$$\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AN} \tag{11}$$

Teniendo en cuenta las relaciones:

$$\boldsymbol{AN} = a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} \tag{12}$$

$$X_A = 2a\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_A = 2a\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{I} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{I} = -\sin\varphi\boldsymbol{i} - \cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{j} + \cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{k} \tag{14}$$

y sustituyendo y operando en (11), se obtiene:

$$\boldsymbol{v}_N = -a\dot{\varphi}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{i} \tag{15}$$

La aceleración del punto N también se obtiene a partir de la aceleración del punto A:

$$\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AN} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AN}) \tag{16}$$

Con los resultados obtenidos en los apartados anteriores, sin más que sustituir en (16) y operar, se obtiene finalmente:

$$\boldsymbol{a}_N = -a\ddot{\varphi}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i} + a\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{j} + a\dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{k} \tag{17}$$