ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 6.º (puntuación: 10) Tiempo: 60 min.

Una masa m se mueve sobre una recta horizontal con rozamiento de constante μ, sometida a la acción de un resorte lineal de constante k y longitud natural l_0, cuyo otro extremo está anclado a la recta. Se pone en movimiento estirando el resorte una elongación inicial $\delta_0 = x_0 - l_0$ y soltándolo con velocidad inicial nula. Se observa que la masa efectúa un movimiento de ida y otro de vuelta, parándose después de este. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento, distinguiendo si fuere necesario entre las diversas fases del mismo.
2. Integración de la ecuación, para obtener de forma explícita $x(t)$.
3. Rango de valores que puede tomar δ_0 para que el movimiento sea una única ida y vuelta.
4. Adoptando el valor máximo del rango anterior, calcular la energía disipada en el movimiento.

1.— La reacción normal de la recta vale mg, por lo que la fuerza de rozamiento durante el movimiento será

$$F_r = -\mu mg\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \tag{1}$$

es decir, tiene un valor μmg con sentido opuesto a la velocidad $\dot{x}$. La ecuación diferencial es por tanto

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) = -\mu mg\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} m\ddot{x} + kx = \mu mg + kl_0 & \dot{x} < 0 \text{ (ida)} \\ m\ddot{x} + kx = -\mu mg + kl_0 & \dot{x} > 0 \text{ (vuelta)} \end{cases} \tag{2}$$

2.— Integramos en primer lugar la primera fase del movimiento, con las condiciones iniciales $(x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0)$. Para simplificar las expresiones, denominaremos $\mu mg = ky_0$, con lo que la solución particular de la ecuación es $x_p = y_0 + l_0$, y la homogénea $x_h = A_1\cos(\omega_0 t)$, siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La constante A se obtiene mediante la condición inicial:

$$A_1\cos(\omega_0 t)|_{t=0} + y_0 + l_0 = x_0 \quad\Rightarrow\quad A_1 = x_0 - l_0 - y_0 = \delta_0 - y_0. \tag{3}$$

El movimiento en la primera fase de ida es pues

$$x(t) = (\delta_0 - y_0)\cos(\omega_0 t) + y_0 + l_0. \tag{4}$$

La velocidad cambia de signo para $t_1 = \pi/\omega_0$, en cuyo instante

$$\delta_1 = x_1 - l_0 = -(\delta_0 - y_0) + y_0 = -\delta_0 + 2y_0. \tag{5}$$

A partir de entonces comienza la segunda fase, en la que la solución general es

$$x(t) = A_2 \cos(\omega_0(t - t_1)) - y_0 + l_0, \tag{6}$$

por lo que considerando la elongación inicial para esta fase en t_1,

$$A_2 = x_1 - l_0 + y_0 = -\delta_0 + 3y_0, \tag{7}$$

y resulta la ecuación

$$x(t) = (-\delta_0 + 3y_0) \cos(\omega_0(t - t_1)) - y_0 + l_0. \tag{8}$$

La velocidad se anulará de nuevo para $t_2 = t_1 + \pi/\omega_0$, en cuyo instante

$$\delta_2 = x_2 - l_0 = -(-\delta_0 + 3y_0) - y_0 = \delta_0 - 4y_0. \tag{9}$$

3.— Para que tenga lugar la primera fase del movimiento (4), el resorte debe vencer al rozamiento, es decir $\delta_0 > y_0$. En la segunda fase, esta condición es $|\delta_1| > y_0$, es decir $\delta_0 > 3y_0$. Para que tuviera lugar una tercera fase, la condición sería $\delta_2 > y_0 \;\Rightarrow\; \delta_0 > 5y_0$. Por tanto, el rango de valores para que sólo ocurra una ida y una vuelta será

$$3y_0 < \delta_0 \leq 5y_0. \tag{10}$$

4.— La energía disipada se calcula fácilmente mediante la diferencia

$$\Delta E = \frac{1}{2}k\delta_2^2 - \frac{1}{2}k\delta_0^2 = \frac{1}{2}k(y_0)^2 - \frac{1}{2}k(5y_0)^2 = -12ky_0^2. \tag{11}$$

Otra forma de calcularla sería evaluando el trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento, llegándose al mismo resultado:

$$\Delta E = \mu mg(\delta_1 - \delta_0) - \mu mg(\delta_2 - \delta_1) = ky_0(-8y_0) - ky_0(4y_0) = -12ky_0^2. \tag{12}$$