Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

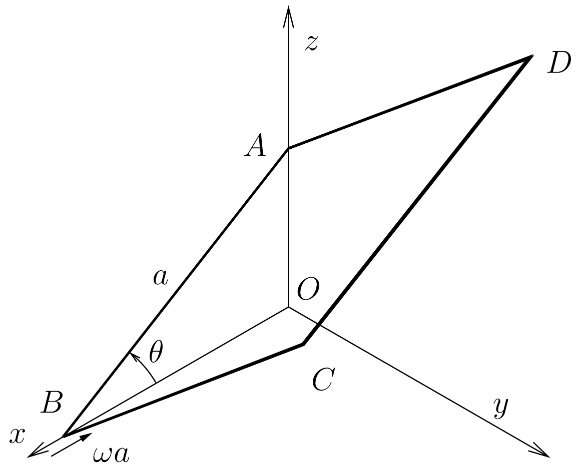
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 6.º Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada $ABCD$ de lado a se mueve de forma que dos vértices contiguos A y B se mantienen respectivamente sobre los ejes Oz y Ox de un triedro trirrectángulo, siendo la velocidad de B constante y de valor ωa. Además, la placa gira alrededor de su borde AB de forma que la velocidad angular total de la misma forma en todo instante un ángulo de 45° con dicho borde. Inicialmente la placa está en posición horizontal, con el vértice A sobre O y el vértice D sobre el eje Oy. Se pide:

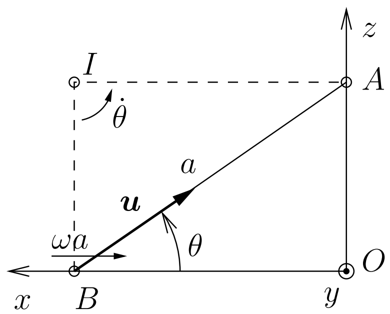


1. Velocidad angular de la placa en una posición genérica.
2. Aceleración angular de la placa.
3. Velocidad del vértice D.
4. Interpretar el tipo de movimiento instantáneo de la placa y calcular la velocidad de deslizamiento o velocidad mínima.

1.— El movimiento de la placa se puede caracterizar mediante la composición de dos rotaciones, una de velocidad $\dot\theta\,\boldsymbol{j}$, que produce el movimiento del segmento AB, y otro giro alrededor del eje AB. Los ejes de ambas rotaciones son constantemente perpendiculares, por lo que para cumplir la condición del enunciado (45° con AB), ambas tendrán igual velocidad angular $\dot\theta$.

El movimiento del segmento AB se produce en el plano Oxz de la figura adjunta, siendo una rotación instantánea $\dot\theta$ alrededor del centro I. Teniendo en cuenta que $\overline{IB} = a\operatorname{sen}\theta$ resulta

$$\dot\theta = \frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta}. \qquad (1)$$



El versor unitario en la dirección BA es $\boldsymbol{u} = -\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}$. La velocidad angular total es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta\,\boldsymbol{j} + \dot\theta\,\boldsymbol{u}. \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta (1), resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{\omega}{\operatorname{tg}\theta}\boldsymbol{i} + \frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta}\boldsymbol{j} + \omega\,\boldsymbol{k}. \qquad (3)$$

2.— Derivando (2),

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\theta}\,\boldsymbol{j} + \ddot{\theta}\,\boldsymbol{u} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

Desarrollando los términos de esta expresión:

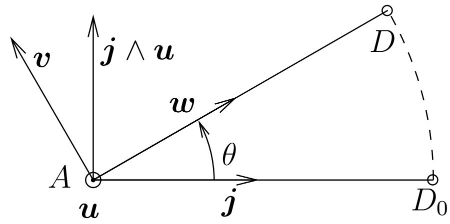
$$\ddot{\theta} = -\omega\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\dot{\theta} = -\omega^2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}; \quad \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u} = \dot{\theta}(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k}); \tag{5}$$

resulta finalmente

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3\theta}\boldsymbol{i} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\,\boldsymbol{j}\right). \tag{6}$$

(Otra forma de proceder, llegándose al mismo resultado, sería derivar directamente las componentes cartesianas en la expresión (3).)

3.— Consideramos un triedro ortonormal ligado al sólido, definido por los versores $\boldsymbol{u}$ (dirigido según BA), $\boldsymbol{w}$ (según AD) y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u}$ (normal a la placa). En el plano normal a BA, podemos establecer la rotación experimentada por el segmento AD desde su orientación original (AD_0, según $\boldsymbol{j}$) hasta la posición considerada; al ser la velocidad de rotación constantemente igual a $\dot{\theta}$, el ángulo girado será θ. Teniendo en cuenta lo anterior, la posición de D queda definida por



$$\overrightarrow{AD} = a\,\boldsymbol{w} = a(\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{u}) = a(\operatorname{sen}^2\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\boldsymbol{k}). \tag{7}$$

La velocidad del punto D se calcula mediante

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\overrightarrow{AD}. \tag{8}$$

Teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\omega a}{\operatorname{tg}\theta}\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

resulta

$$\boldsymbol{v}_D = \omega a\left(\boldsymbol{j} - \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\boldsymbol{k}\right). \tag{10}$$

4.— El movimiento instantáneo se compone de dos rotaciones, cuyos ejes se cruzan en el espacio: $\dot{\theta}\,\boldsymbol{j}$ por I y $\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}$ por B. El movimiento resultante será un movimiento helicoidal general, con una velocidad de deslizamiento según el eje helicoidal (velocidad mínima) y una rotación alrededor del mismo. La dirección del eje helicoidal es

$$\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}).$$

Al ser la composición de dos rotaciones por ejes que se cruzan perpendicularmente, el eje pasará por el punto medio de la recta de mínima distancia, que es la perpendicular por I al segmento AB. La velocidad de deslizamiento se calcula proyectando la velocidad de un punto cualquiera (9):

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = \frac{\omega a}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} = \frac{\omega a}{\sqrt{2}}\cos\theta. \tag{11}$$