Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

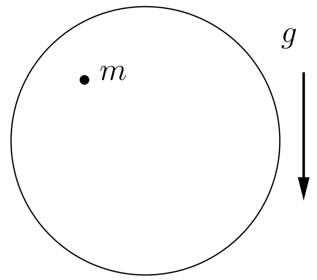
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea una partícula ligada a una superficie lisa. 1) *establecer* de forma general las ecuaciones generales de la dinámica. 2) *Discutir* si la normal principal a la trayectoria coincide o no con la normal a la superficie. 3) *Aplicar* lo anterior al caso de la figura adjunta, con una partícula de masa m sobre una esfera lisa, sometida a un campo gravitatorio uniforme g.
(5 ptos.)



Suponemos una superficie definida por su ecuación (implícita) $f(\boldsymbol{r}) = 0$, la reacción es normal a la misma $\boldsymbol{N} = \lambda\, \mathrm{d}f/\mathrm{d}\boldsymbol{N}$. Llamamos $\boldsymbol{F}$ a las fuerzas aplicadas. La ecuación dinámica es

$$\boldsymbol{F} + \lambda \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = m\ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{1}$$

Esta ecuación vectorial, junto con $f(\boldsymbol{r}) = 0$, define cuatro ecuaciones escalares para las cuatro incógnitas en $(\boldsymbol{r}, \lambda)$.

La trayectoria de la partícula sobre la superficie es una curva en la que se define un triedro intrínseco $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ en cada punto. Proyectando (1) sobre las direcciones de este triedro, y teniendo en cuenta las componentes de la aceleración según el mismo, resultan las ecuaciones:

$$F_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}; \quad F_n + N_n = m\kappa v^2; \quad F_b + N_b = 0, \tag{2}$$

siendo $\kappa = 1/\rho$ la curvatura y (N_n, N_b) las componentes de la normal a la superficie según las normales a la curva. Si la normal a la superficie coincide con la normal principal a la trayectoria será $N_b = 0$, es decir $F_b = 0$. Esto ocurre si la fuerza aplicada es nula. Estrictamente, sólo sería necesario exigir que la componente según la binormal sea constantemente nula, pero esta última condición es difícil garantizarla en un caso general, ya que a priori la trayectoria sobre la superficie es desconocida, y la binormal varía a lo largo de la misma. Las trayectorias en las que la normal principal coincide con la normal a la superficie se denominan *geodésicas.*

En el ejemplo propuesto, considerando coordenadas en un triedro con origen en el centro de la esfera, las ecuaciones (1) serían

$$2\lambda x = m\ddot{x}; \; 2\lambda y = m\ddot{y}; \; 2\lambda z - mg = m\ddot{z}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Los únicos casos en los que se cumple la condición 2) respecto a la normal serían las trayectorias geodésicas, que en el caso de la esfera son los círculos máximos (meridianos y ecuador). En ningún caso es posible una trayectoria según el ecuador, como es fácil comprobar. Las trayectorias según meridianos se obtienen siempre que el punto se lance desde uno de los polos N ó S. En cualquier otro caso no se verifica la condición.

Sea un sistema holónomo formado por N masas puntuales, definido por coordenadas generalizadas $q_j,\ j = 1, \ldots n$, que permiten expresar los vectores posición como $\boldsymbol{r}_i(q_j),\ i = 1 \ldots N$, siendo $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t = 0$. 1) *Obtener* la expresión general de la energía cinética en función de las velocidades generalizadas. 2) Suponiendo un potencial estacionario $V(q_j)$, *discutir* la existencia de la integral primera de Jacobi y su interpretación física. (5 ptos.)

La expresión de las velocidades es $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^n \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}q_j}\dot{q}_j$, por lo que la energía cinética es

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \right)^2 .$$

Desarrollando el cuadrado en la expresión anterior,

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) = \sum_{j,k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{a_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

Al no depender la definición de las coordenadas generalizadas del tiempo de forma explícita, T resulta una expresión homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas.

Derivando $L = T - V$, y empleando la convención implícita de sumatorio para índices repetidos,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right). \end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta las ecuaciones de Lagrange $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)$ y la condición de potencial estacionario. Teniendo en cuenta que $\partial L/\partial \dot{q}_j = \partial T/\partial \dot{q}_j = 2a_{jk}\dot{q}_k$, resulta

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2a_{jk}\dot{q}_k\dot{q}_j - L\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2T - T + V\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + V\right). \tag{3}$$

La ecuación anterior indica que existe la integral primera de Jacobi $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = h$ (cte.) y esta coincide con la energía total $E = T + V$ que se conserva por tanto.