

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos

Nombre

N.º

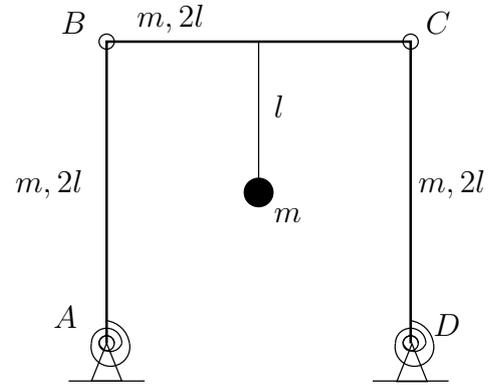
Grupo

--	--	--

Ejercicio 2.º

Tiempo: 60 min.

El marco $ABCD$ de la figura está constituido por tres barras iguales, articuladas en sus extremos, de masa m y longitud $2l$. En los extremos fijos A y D están dispuestos sendos muelles de torsión que ofrecen un momento resistente proporcional al ángulo girado, siendo k el valor de la constante de proporcionalidad, mientras que los extremos B y C permiten el giro libre. Asimismo del punto medio de la barra BC cuelga un péndulo simple, formado por una varilla sin masa de longitud l y una masa puntual m en el extremo libre.

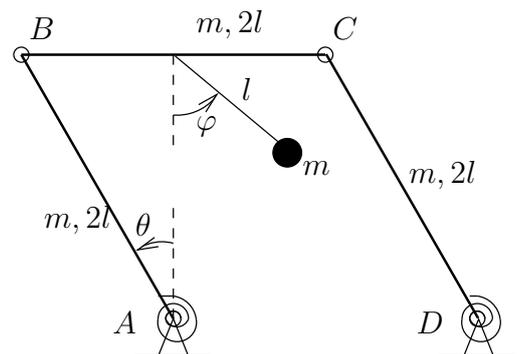


Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de las ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio de la figura. Calcular el valor mínimo de la constante k para que dicho equilibrio sea estable.
3. Para el caso en que la constante k valga el doble del valor calculado en el apartado anterior, obtener las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones.

1. Se consideran las coordenadas generalizadas θ y φ correspondientes a los giros absolutos de la barra AB y del péndulo, respectivamente (ver figura adjunta). La expresión de la energía cinética es:

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \underbrace{\left(\frac{2}{3} ml^2 \dot{\theta}^2 \right)}_{\text{barras } AB \text{ y } CD} + \underbrace{2ml^2 \dot{\theta}^2}_{\text{barra } BC} + \\
 &\quad \underbrace{\frac{1}{2} \left((l\dot{\varphi} \cos \varphi - 2l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\varphi} \sin \varphi - 2l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right)}_{\text{péndulo}} \\
 &= \frac{16}{3} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) \quad (1)
 \end{aligned}$$



y la energía potencial:

$$V = 6mgl \cos \theta - mgl \cos \varphi + k\theta^2 \quad (2)$$

A partir de la función lagrangiana $L = T - V$, sustituyendo (1) y (2) y derivando se obtienen

las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$\frac{32}{3}ml^2\ddot{\theta} - 2ml^2\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + 2ml^2\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) - 6mgl \sin \theta + 2k\theta = 0 \quad (3)$$

$$-2ml^2\ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + ml^2\ddot{\varphi} - 2ml^2\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) + mgl \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

2. Dado que en la posición de equilibrio considerada las coordenadas generalizadas valen cero, para obtener las ecuaciones linealizadas se realizan las siguientes sustituciones en (3) y (4):

$$\sin \theta \approx \theta \quad \sin \varphi \approx \varphi \quad \cos \theta \approx 1 \quad \cos \varphi \approx 1 \quad (5)$$

despreciando los terminos de orden 2 y superior, correspondientes a las coordenadas y velocidades generalizadas, resulta:

$$\frac{32}{3}ml^2\ddot{\theta} - 2ml^2\ddot{\varphi} + (2k - 6mgl)\theta = 0 \quad (6)$$

$$-2ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \quad (7)$$

Para que el equilibrio sea estable las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio considerada deben de estar acotadas. Esto se consigue si la matriz de rigidez \mathbf{K} es definida positiva. En este caso dicha matriz es diagonal y el coeficiente de φ en (7), por tanto basta con imponer que el coeficiente de la coordenada θ en la ecuación (6) sea positivo:

$$2k - 6mgl > 0 \quad \Rightarrow \quad k_{\min} > 3mgl \quad (8)$$

3. Tomando $k = 6mgl (= 2k_{\min})$, el sistema de ecuaciones (6; 7) se expresa en forma matricial:

$$[\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

siendo:

$$[\mathbf{M}] = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{K}] = mgl \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Las frecuencias propias se obtienen resolviendo la ecuación bicuadrática que resulta de sustituir las expresiones de (10) en:

$$|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (11)$$

Operando se obtiene:

$$10\omega^4 - 25\frac{g}{l}\omega^2 + 9\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

y resolviendo y escogiendo únicamente las raíces positivas resulta finalmente:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{53}{80}}}\sqrt{\frac{g}{l}} = 1,4366\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{53}{80}}}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,6603\sqrt{\frac{g}{l}}$$