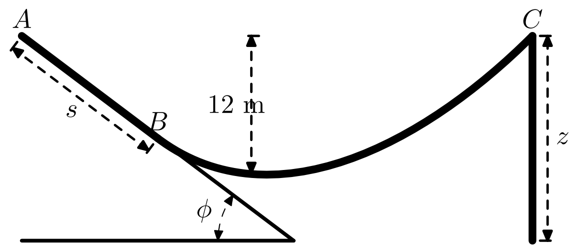
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

El cable de la figura es uniforme de densidad 1 kg/m, por la izquierda se apoya en un plano rugoso que está inclinado un ángulo $\phi = 30$ grados y que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$, mientras que por la derecha cuelga después de pasar en C por una polea lisa, permaneciendo en equilibrio. El extremo A del cable está a la misma altura que la polea en C y el punto más bajo del cable que pende entre B y C está 12 m por debajo de C.



Para el caso en que el equilibrio esté a punto de romperse se pide:

1. Valores de s, z y longitud total del cable.
2. Tensión máxima del cable.

1.— La forma de equilibrio que adopta el cable entre B y C al estar sometido a su propio peso es la de una catenaria.

Estableciendo el equilibrio en C tenemos:

$$qy_C = q(a + 12) = qz \quad \Rightarrow \quad z = y_C = a + 12. \tag{1}$$

Por otro lado estableciendo el equilibrio en B teniendo en cuenta la situación límite del mismo se tiene

$$\mu qs\cos(\phi) - qs\,\mathrm{sen}(\phi) = qy_B = T_B. \tag{2}$$

A su vez observando la relación entre la tensión horizontal del cable y el parámetro de la catenaria,

$$T_B\cos(\phi) = qy_B\cos(\phi) = aq \Rightarrow y_B = \frac{a}{\cos(\phi)}. \tag{3}$$

Introduciendo estas ecuaciones (1, 2 y 3) en la ecuacion de compatibilidad geométrica que se obtiene con la diferencia de ordenadas entre A y B

$$y_A - y_B = y_C - y_B = s\,\mathrm{sen}(\phi) \tag{4}$$

se obtiene

$$\frac{s}{2}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-1\right)+12=0 \tag{5}$$

de donde sale que s es 21,856 m que introducida en (2) nos da $y_B = 8{,}000$ m y con (3) obtenemos $a = 6{,}928$ m y por tanto según (1) $z = 18{,}928$ m.

La longitud del cable se obtiene sumando s, z y la longitud de catenaria que cuelga, que a su vez obtenemos como suma de los dos tramos entre el vértice y los puntos B y C:

$$s_B = \sqrt{y_B^2 - a^2}\,;$$

$$s_C = \sqrt{y_C^2 - a^2} = \sqrt{(a+12)^2 - a^2}.$$

Sumando todos los tramos obtenemos $L = 62{,}399$ m.

2.— La tensión máxima del cable se obtiene en el punto más alto del tramo de catenaria, y_C ya que en la parte apoyada en el plano la tensión disminuye, lo mismo que en la parte que cuelga verticalmente de C:

$$T_C = q y_C = q(a+12) = 18{,}928\,\mathrm{kg}$$