Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

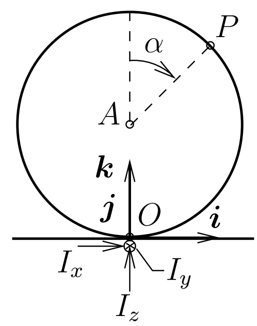
Un aro homogéneo de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre un plano horizontal rugoso de forma que se encuentra en posición vertical y su centro A describe una trayectoria rectilínea con velocidad v_A.

En un cierto instante, una partícula de masa m choca con el aro en dirección perpendicular a su plano con velocidad v_0 y se queda adherida en él. Se supone que en la impulsión el aro rueda sin deslizar sobre el suelo, aunque puede pivotar libremente sobre éste.

Se pide:

1. Movimiento instantáneo del aro y de la partícula inmediatamente después del impacto. NOTA: bastará expresar las ecuaciones para resolver el campo de velocidades, no siendo imprescindible la resolución explícita de las mismas.
2. Calcular el valor de la percusión vertical que ejerce el suelo sobre el aro en función del lugar de impacto de la partícula sobre el aro.
3. Calcular el lugar geométrico de los puntos del aro en los que debe incidir la partícula para que aquél no tienda a despegarse del suelo inmediatamente después del impacto. Calcular también el punto en el que debe impactar la partícula para que se produzca la máxima percusión vertical.

1.- Puesto que la partícula se queda adherida y el aro rueda sin deslizar, el movimiento instantáneo del nuevo sólido formado por la partícula y el aro después del impacto es una rotación pura. Por tanto, su campo de velocidades queda totalmente determinado con el cálculo de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.



En el momento en que la partícula impacta sobre el aro, aparece una percusión $\boldsymbol{I}$ del suelo sobre éste en el punto O de contacto. La ecuación de balance de momento cinético en O aplicada al sistema formado por el aro y la partícula toma la forma:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{\text{antes}} = (\boldsymbol{H}_O)_{\text{despues}} \tag{1}$$

En esta ecuación no aparece la percusión externa $\boldsymbol{I}$ puesto que no da momento en O, y tampoco la percusión entre el aro y la partícula, ya que ésta es interna.

Situamos el punto de impacto (P) de la partícula mediante el ángulo α que forma su radio con la vertical, tal y como se muestra en la figura adjunta. Denotando por $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad de rotación del aro antes y después del impacto respectivamente, el momento cinético se calcula mediante las expresiones vectoriales:

$$(\boldsymbol{H}_O)_{\text{antes}} = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega} + m\,\boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{v}_0 \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{H}_O)_{\text{despues}} = \boldsymbol{I}'_O\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{I}'_O$ el tensor de inercia en O del nuevo sólido rígido formado por el aro y la partícula a él adherida. Otra forma de expresar el momento cinético después del impacto es $(\boldsymbol{H}_O)_{\text{despues}} = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{OP} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OP})$, que es totalmente equivalente a (3).

Definimos un sistema de referencia auxiliar $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ como el mostrado en la figura, donde el vector $\boldsymbol{j}$ entra en el papel. Las componentes de los distintos vectores que intervienen en (2) y (3) son $\boldsymbol{\Omega} = (0, v_A/R, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\boldsymbol{v}_0 = (0, v_0, 0)$, y los tensores de inercia se expresan como:

$$\boldsymbol{I}_O = mR^2 \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{I}'_O = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{2} + 2\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha) \\ 0 & 4 + 2\cos\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha) & 0 & \frac{3}{2} - \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Las tres ecuaciones que permiten calcular las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ se obtienen sustituyendo y operando lo anterior en (1), (2) y (3), y resultan:

$$-\frac{v_0}{R}(1+\cos\alpha) = \left(\frac{7}{2} + 2\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)\omega_x - \operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)\omega_z \tag{4}$$

$$\frac{v_A}{R} = (2+\cos\alpha)\omega_y \tag{5}$$

$$\frac{v_0}{R}\operatorname{sen}\alpha = -\left(\operatorname{sen}\alpha\,(1+\cos\alpha)\right)\omega_x + \left(\frac{3}{2} - \cos^2\alpha\right)\omega_z \tag{6}$$

2.- Para calcular el valor de la percusión vertical, planteamos el balance de cantidad de movimiento $(\boldsymbol{\Phi})$ al sistema formado por la partícula y el aro:

$$(\boldsymbol{\Phi})_{\text{despues}} - (\boldsymbol{\Phi})_{\text{antes}} = m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OP}) - m(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{I}$$

resultando:

$$mR(2+\cos\alpha)\omega_y - mv_A = I_x \tag{7}$$

$$mR\operatorname{sen}\alpha\,\omega_z - mR(2+\cos\alpha)\omega_x - mv_0 = I_y \tag{8}$$

$$-mR\operatorname{sen}\alpha\,\omega_y = I_z \tag{9}$$

Despejando ω_y de (5) e introduciéndolo en (9), obtenemos el valor de la percusión vertical:

$$I_z = -mv_A\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2+\cos\alpha} \tag{10}$$

3.- Los lugares de impacto para los que el aro no tiende a levantarse son aquellos para los que la percusión vertical es hacia arriba ($I_z > 0$). Por tanto, ($180° \leq \alpha \leq 360°$); es decir, debe impactar en el semiaro trasero en el sentido de avance del aro.

Para obtener el lugar de impacto para el que se produce la percusión máxima, no hay más que derivar la expresión (10):

$$\frac{\mathrm{d}I_z}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 240° \tag{11}$$