Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (25 de noviembre de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 30 min.

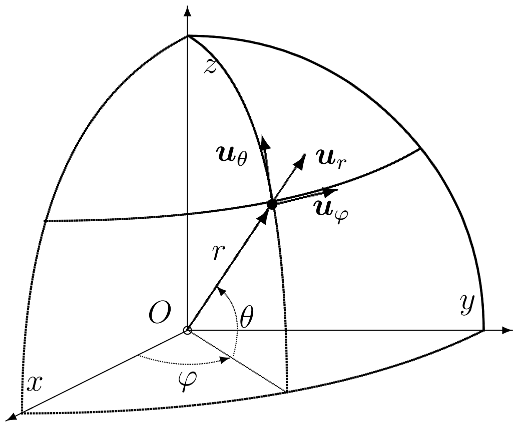
Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Deducir, a partir de la expresión general de la derivada de un vector en un sistema móvil, las expresiones generales de los campos de velocidades y aceleraciones en una composición de dos movimientos.

Aplicar al caso de las coordenadas esféricas (figura adjunta), *deduciendo* las expresiones generales de velocidad y aceleración, considerando como movimiento de arrastre el definido por φ para el plano meridiano.

Nota.— Se recuerda la expresión de la aceleración en coordenadas polares:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta.$$



Sea un vector $\boldsymbol{u}$, del cual se conoce su variación respecto a un sistema de referencia móvil S', mediante la derivada $(\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t)_{\text{rel}}$. Por su parte, S' se mueve respecto a una referencia fija S con velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. La derivada (absoluta) respecto al tiempo es

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

Consideramos el vector posición $\boldsymbol{r}$ en una referencia absoluta, cuya contrapartida en relación a un sistema móvil con origen en O es $\boldsymbol{\rho}$. La relación entre ambos es

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

Derivando esta expresión y teniendo en cuenta (1),

$$\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{rel}, \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{v}_{\text{arr}} = \dot{\boldsymbol{r}}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ la denominada velocidad de arrastre, correspondiendo a la que tendría el punto si se moviese rígidamente unido al sistema móvil, y $\boldsymbol{v}_{rel} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t)_{\text{rel}}$.

Derivando de nuevo (3) y aplicando (1) en las derivadas de vectores ligados a la referencia móvil, se obtiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{v}} &= \ddot{\boldsymbol{r}}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}) + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}} \\ &= \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Aquí la aceleración de arrastre tiene la misma interpretación antes mencionada, valiendo $\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})$. Por su parte, se ha definido un término adicional $\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ denominado aceleración *complementaria* o de *coriolis*.

En la aplicación al caso de las coordenadas esféricas, según se indica, el movimiento de arrastre correspondiente a φ, por lo que el sistema móvil definido por el plano meridiano (que contiene los versores $\boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_\theta$) gira con velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$. Por otra parte, la velocidad relativa es $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = r\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\boldsymbol{u}_r$. Por tanto, aplicando (3), la velocidad resulta

$$\boldsymbol{v} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \wedge r\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\boldsymbol{u}_r = r\dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\boldsymbol{u}_r. \tag{5}$$

Igualmente podemos obtener la expresión de la aceleración. Para ello tenemos en cuenta que el movimiento relativo corresponde a la expresión en polares según (r, θ):

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta.$$

Desarrollando las otras componentes de la aceleración en (4):

$$\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \ddot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \wedge r\boldsymbol{u}_r + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \wedge (r\dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi) = r\ddot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\theta(\cos\theta\,\boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta); \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} \wedge (r\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\boldsymbol{u}_r) = -2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi + 2\dot{\varphi}\dot{r}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi; \tag{7}$$

por lo que resulta finalmente la expresión

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} =& (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)\boldsymbol{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{u}_\theta \\ &+ (r\ddot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\varphi.\end{aligned} \tag{8}$$