Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

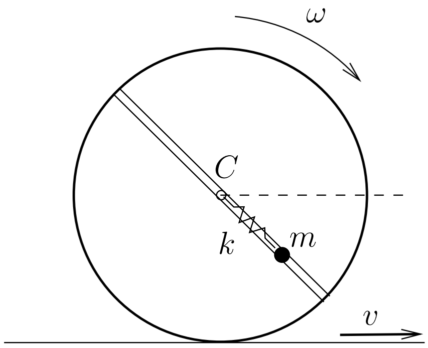
1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (25 de noviembre de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un disco de radio R se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que gira con velocidad angular ω constante. El disco además rueda sin deslizar sobre una recta horizontal que se mueve con una velocidad constante v.

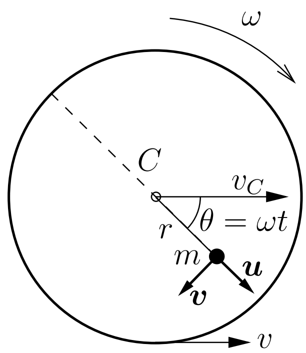
En el disco existe una ranura radial lisa en la que se mueve una partícula de masa m, que está unida además al centro (C) del disco mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.



Se pide:

1. Expresar la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en la ranura.
2. Obtener el valor mínimo de k para que el movimiento de la partícula respecto de la ranura sea de tipo oscilatorio.
3. Expresar la reacción que ejerce la ranura sobre la partícula.
4. Suponiendo que en el instante inicial la ranura está horizontal y la partícula se encuentra en el borde derecho del disco y en reposo respecto de éste, calcular el trabajo de la reacción entre $t = 0$ y un instante en que la ranura ha girado un cuarto de vuelta ($t = \pi/(2\omega)$). Particularizar este cálculo para $k = 10mg/R$, $\omega = \sqrt{g/R}$ y $v = (5/6)\omega R$.

1.— La velocidad del centro C del disco es $v_C = v + \omega R$, constante, por lo que puede emplearse como origen de una referencia inercial. Para definir el movimiento de la masa relativo al disco tomaremos coordenadas polares $(r, \theta = \omega t)$, con versores unitarios $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. La aceleración de la partícula en esta referencia resulta



$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\boldsymbol{u} + 2\dot{r}\omega\,\boldsymbol{v}. \qquad (1)$$

Las fuerzas sobre la partícula son:

$$\boldsymbol{N} = N\,\boldsymbol{v} \qquad \text{(reacción normal);} \qquad (2)$$
$$\boldsymbol{F}_k = -kr\,\boldsymbol{u} \qquad \text{(muelle);} \qquad (3)$$
$$\boldsymbol{F}_g = -mg\,\boldsymbol{k} = mg(\operatorname{sen}(\omega t)\,\boldsymbol{u} + \cos(\omega t)\,\boldsymbol{v}). \qquad \text{(peso).} \qquad (4)$$

Tomando las componentes según la ranura se obtiene la ecuación diferencial pedida:

$$\boxed{m\ddot{r} + (k - m\omega^2)r = mg\operatorname{sen}(\omega t).} \qquad (5)$$

2.— Para que el movimiento definido por (5) sea oscilatorio la constante del resorte equivalente ha de ser positiva, es decir

$$k - m\omega^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k > m\omega^2}. \tag{6}$$

3.— La reacción se calcula expresando la ecuación de la dinámica en dirección transversal a la ranura,

$$\boxed{N = 2m\dot{r}\omega - mg(\cos\omega t).} \tag{7}$$

4.— No se conserva la energía, debido al trabajo que desarrolla la reacción, la cual deberá encargarse de que el movimiento sea con velocidad ω constante. El procedimiento más sencillo para calcular el trabajo desarrollado por N es expresar el balance de energía cinética, que se puede descomponer en el trabajo desarrollado por las fuerzas conservativas (W_c) y las no conservativas (W_N):

$$W_c + W_N = T_1 - T_0;$$

teniendo en cuenta que el trabajo de las fuerzas conservativas se puede expresar como diferencia de potencial, $W_c = -(V_1 - V_0)$,

$$W_N = (T_1 + V_1) - (T_0 + V_0). \tag{8}$$

Basta por tanto calcular la energía cinética y la potencial en ambos estados. En el primer estado se puede evaluar directamente a partir de la condición inicial del sistema definida en el enunciado. Sin embargo, para conocer el estado final debemos antes integrar la ecuación del movimiento (5) para conocerlo.

Esta ecuación representa un movimiento armónico simple con fuerza aplicada armónica, obteniéndose la solución general como suma de la general de la homogénea más una particular de la completa:

$$r(t) = \underbrace{a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)}_{r_h(t)} + \underbrace{B\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)}_{r_p(t)}. \tag{9}$$

siendo $\omega_0 = \sqrt{(k - m\omega^2)/m} = 3\omega$. Sustituyendo la particular r_p en (5) se obtienen los parámetros:

$$B = \frac{mg}{k - 2m\omega^2} = \frac{R}{8}; \quad \delta = 0. \tag{10}$$

Por otra parte, obligando a las condiciones iniciales ($r_0 = R$; $\dot{r}_0 = 0$) se obtienen las constantes de r_h:

$$a = -B\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{R}{24}; \quad b = R. \tag{11}$$

Sustituyendo en (9), la ecuación del movimiento integrada resulta

$$r(t) = -\frac{R}{24}\,\mathrm{sen}(3\omega t) + R\cos(3\omega t) + \frac{R}{8}\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{12}$$

En la posición 1 es $\omega t = \pi/2$, por lo que sustituyendo en esta ecuación se obtiene

$$r_1 = \frac{R}{6}; \quad \dot{r}_1 = 3R\omega. \tag{13}$$

Con estos valores, y las condiciones iniciales antes citadas $(r_0, \dot{r}_0)$ las velocidades (absolutas) de la partícula en los dos instantes serán:

$$v_0^2 = (v_C + \dot{r}_0)^2 + (r_0\omega)^2 = R^2\omega^2 \left(\frac{11^2}{6^2} + 1\right);$$
$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + (v_C - r_1\omega)^2 = R^2\omega^2 \left(\frac{10^2}{6^2} + 9\right).$$

Ya estamos en condiciones de evaluar el balance de energía (8):

$$W_N = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \left[\left(\frac{10^2}{6^2} + 9\right) - \left(\frac{11^2}{6^2} + 1\right)\right] - mg\frac{R}{6} + \frac{1}{2}\underbrace{10\frac{mg}{R}}_{k} R^2 \left(\frac{1}{6^2} - 1\right).$$

Operando, se obtiene el resultado final:

$$\boxed{W_N = -\frac{95}{72}mgR}$$