Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

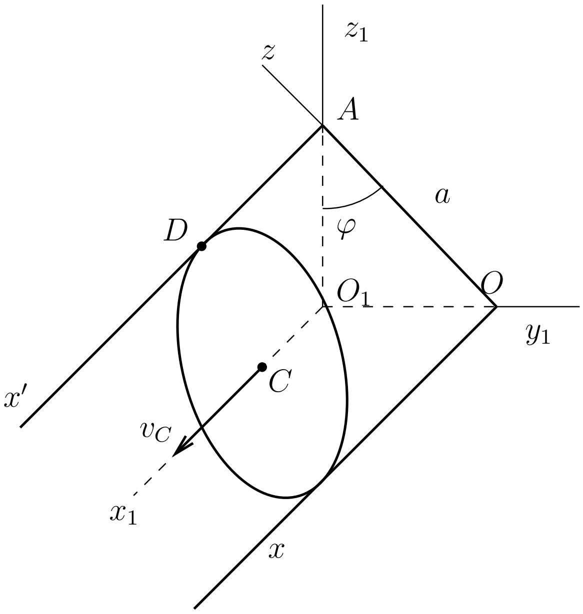
1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (25 de noviembre de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un plano móvil Oxz desliza sobre un sistema de referencia fijo $O_1x_1y_1z_1$, de forma que las dos rectas Ox y Ax', cuya distancia es a, están contenidas en los planos $O_1x_1y_1$ y $O_1x_1z_1$ respectivamente. El movimiento de dicho plano es conocido y se define mediante el ángulo $\varphi = \varphi(t)$ (ver figura).

Un disco de diámetro a y centro C, que está contenido en todo momento en el plano móvil, rueda sin deslizar sobre la recta Ox, siendo conocida la velocidad de su centro $v_C = v_C(t)$. Se pide calcular en un instante genérico:



1. Velocidad angular y aceleración angular del disco.
2. Eje del movimiento helicoidal tangente y velocidad mínima cuando la posición del centro C del disco es $x_C = a$.
3. Velocidad y aceleración del punto D del disco, diametralmente opuesto al de contacto del disco con la recta Ox.
4. Valor del ángulo φ en el instante en que el movimiento del disco es una rotación instantánea.

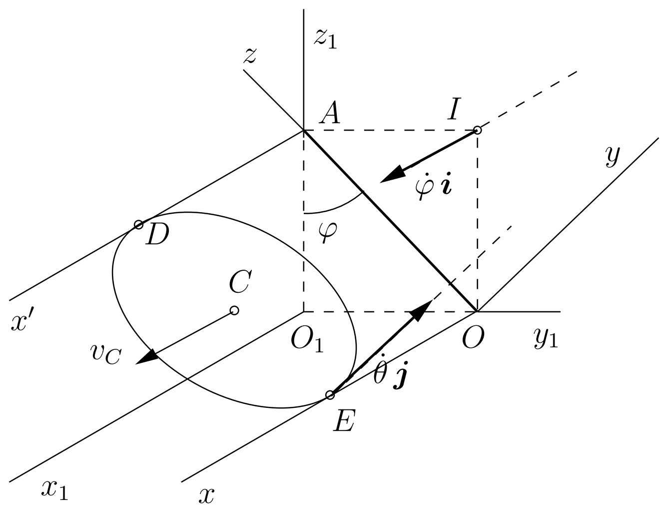
⋆

1.— Para desarrollar las expresiones emplearemos por una parte el triedro fijo $O_1x_1y_1z_1$, con versores asociados $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$, y por otra el triedro móvil $Oxyz$, con versores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Las relaciones de transformación entre estos son:

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_1;$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{j} = \cos\varphi\,\boldsymbol{j}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}_1; \\ \boldsymbol{k} = -\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{k}_1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{j}_1 = \cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{k}_1 = \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\varphi\,\boldsymbol{k}. \end{cases} \qquad (2)$$



El movimiento se puede interpretar como la composición de dos rotaciones. Una corresponde al movimiento de rotación del plano, de eje paralelo a x por el punto I y velocidad $\dot\varphi$. La otra corresponde a la rodadura del disco sobre Ox, cuyo eje lleva la dirección y (normal al plano) por el punto E, con velocidad $\dot\theta = v_C/(a/2)$. Ambos ejes se cruzan sin cortarse, por lo que el movimiento no es una rotación pura, sino un movimiento helicoidal general. La expresión de la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\varphi\,\boldsymbol{i} + \dot\theta\,\boldsymbol{j} = \dot\varphi\,\boldsymbol{i} + \frac{2v_C}{a}\,\boldsymbol{j}. \tag{3}$$

La derivada de $\boldsymbol{\Omega}$ se obtiene teniendo en cuenta el giro de la referencia móvil $Oxyz$ con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \dot\varphi\,\boldsymbol{i}$, así como la propia variación de $\dot\varphi$ y v_C:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot\varphi\,\boldsymbol{i} + \ddot\theta\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \ddot\varphi\,\boldsymbol{i} + \frac{2\dot v_C}{a}\,\boldsymbol{j} + \dot\varphi\frac{2v_C}{a}\boldsymbol{k}.$$

2.— La expresión general de la posición de un punto P del eje, relativa a un punto dado O del sólido, es $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_O/\Omega^2$. Aplicando esta expresión al punto E, cuya velocidad es conocida y coincide con la del movimiento de arrastre del plano, $\boldsymbol{v}_E = a\dot\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{j}_1$, resulta:

$$\overrightarrow{EP} = \frac{a\dot\varphi\cos\varphi}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\dot\varphi\,\boldsymbol{k}_1 - \dot\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i}). \tag{4}$$

A esto habría que sumar el vector posición de E, por lo que en la posición pedida es

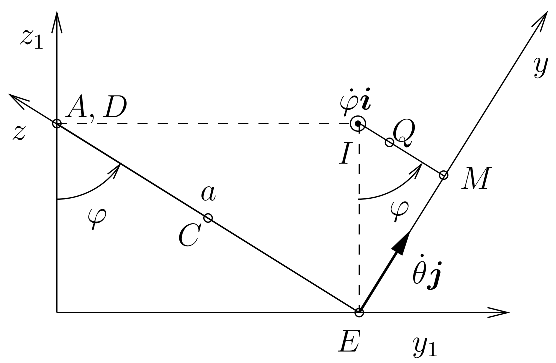
$$\boldsymbol{r}_P = a\,\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}_1 + \frac{a\dot\varphi\cos\varphi}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\dot\varphi\,\boldsymbol{k}_1 - \dot\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i}). \tag{5}$$

Por otra parte, medido desde la referencia móvil $Oxyz$ y descomponiendo las componentes según estas mismas coordenadas mediante las relaciones (2):

$$\boldsymbol{\rho}_P = \boldsymbol{\rho}_E + \overrightarrow{EP} = a\,\boldsymbol{i} + \frac{a\dot\varphi\cos\varphi}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(-\dot\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \dot\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{k}). \tag{6}$$

El Eje del movimiento helicoidal tangente (EHT) pasa por P y lleva la dirección de $\boldsymbol{\Omega} = \dot\varphi\,\boldsymbol{i} + \dot\theta\,\boldsymbol{j}$.

Los dos ejes de las rotaciones elementales se cruzan, siendo su distancia mínima $\overline{IM} = a\cos^2\varphi$. En la figura adjunta se representa dicho segmento, situado en el plano y_1z_1 por el diámetro del disco. Puede comprobarse que el EHT pasa por la recta de mínima distancia entre ambos ejes de rotación, cortándolo en un punto Q del mismo, a las distancias respectivas:



$$\begin{cases} a\cos^2\varphi\dfrac{\dot\varphi^2}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2} & \text{del eje } \dot\theta; \\ a\cos^2\varphi\dfrac{\dot\theta^2}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2} & \text{del eje } \dot\varphi. \end{cases}$$

La velocidad mínima es la de los puntos del EHT, y se halla proyectando la velocidad de un punto dado sobre dicho eje:

$$\boldsymbol{v}_{\min} = \left(\boldsymbol{v}_E \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}\right)\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = a\cos^2\varphi\frac{\dot\theta\dot\varphi}{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2}(\dot\varphi\,\boldsymbol{i} + \dot\theta\,\boldsymbol{j}). \tag{7}$$

3.— Para obtener la velocidad basta desarrollar la expresión general en el movimiento del sólido, en función de la velocidad conocida de E,

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{\Omega} \wedge (a\,\boldsymbol{k}) = a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j}_1 - a\dot{\varphi}\,\boldsymbol{j} + a\dot{\theta}\,\boldsymbol{i}. \tag{8}$$

Esta velocidad puede también expresarse en el triedro fijo, mediante las fórmulas de cambio (1), resultando

$$\boldsymbol{v}_D = -a\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{k}_1 + a\dot{\theta}\,\boldsymbol{i}. \tag{9}$$

Nótese que en esta última ecuación el primer sumando corresponde a la velocidad de arrastre de D por el giro del plano y el segundo al movimiento del disco relativo al plano.

Para la aceleración emplearemos la descomposición de movimientos entre el arrastre del plano y el movimiento relativo del disco:

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{arr}} + \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{cor}}. \tag{10}$$

Cada uno de estos términos vale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{arr}} &= -(a\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{k}_1 & (11)\\ \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{rel}} &= -\frac{a}{2}\dot{\theta}^2\boldsymbol{k} + a\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i}; & (12)\\ \boldsymbol{a}_{D,\mathrm{cor}} &= 2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} \wedge (a\dot{\theta}\,\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{0}; & (13) \end{aligned}$$

por lo que resulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_D &= -(a\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{k}_1 - \frac{a}{2}\dot{\theta}^2\boldsymbol{k} + a\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i}\\ &= 2\dot{v}_C\,\boldsymbol{i} - (a\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\varphi + a\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{j} - (2\frac{v_C^2}{a} + a\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{14}$$

Otro procedimiento que podríamos haber utilizado para este cálculo es la expresión general del campo de aceleraciones del sólido rígido, partiendo de la aceleración del punto E:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{a}_E + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (a\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge a\boldsymbol{k});\\ \boldsymbol{a}_E &= \boldsymbol{a}_{E,\mathrm{arr}} + \boldsymbol{a}_{E,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{a}_{E,\mathrm{cor}} = (a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi)\boldsymbol{j}_1 + \frac{1}{2}a\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{k}; \end{aligned}$$

no proseguimos ya que, como puede verse, este procedimiento no resulta más ventajoso que el anterior. Se sugiere como ejercicio comprobar que se obtiene igual resultado.

4.— Para que el movimiento sea una rotación instantánea, los dos ejes de rotación deben cruzarse, lo que ocurre para

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

También podríamos haber razonado este mismo resultado argumentando que la velocidad mínima (7) debe ser nula.