Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

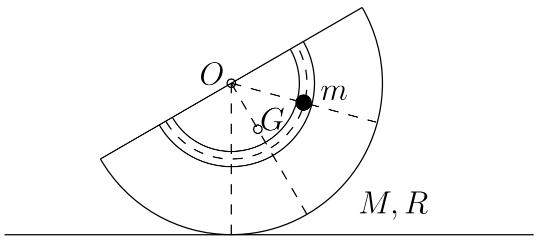
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25 ó 10/60) Tiempo: 60 min.

Un semidisco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. En el semidisco existe una acanaladura circular de radio $R/2$, por la que circula una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

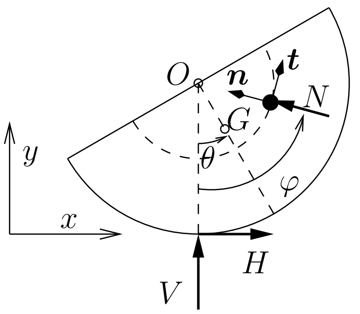


1. Ecuaciones del movimiento e integrales primeras, caso de haberlas;
2. Expresar la reacción que ejerce el semidisco sobre la partícula, en una posición genérica.
3. Expresar la reacción de la recta sobre el semidisco, en una posición genérica.

⋆

1.— La posición del centro de masas G es $\overline{OG} = \dfrac{4R}{3\pi}$, lo que se puede calcular aplicando directamente el teorema de Guldin. Por tanto el momento de inercia es

$$I_G = MR^2\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right].$$



Tomaremos como grados de libertad los ángulos θ y φ de la figura, medidos ambos desde la vertical descendente en sentido antihorario.

Expresaremos en primer lugar las velocidades de G y de m:

$$\boldsymbol{v}_G = -R\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v}_m = -R\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \frac{R}{2}\dot{\varphi}\underbrace{(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j})}_{\boldsymbol{t}}. \tag{2}$$

Operando la Lagrangiana,

$$L = T - V = \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\left[1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3\pi}\right)\cos\theta\right]\dot{\theta}^2$$
$$+ \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 - 2\frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] + \frac{4R}{3\pi}Mg\cos\theta + \frac{R}{2}mg\cos\varphi, \tag{3}$$

resulta:

$$L = \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{4} - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] + \frac{4R}{3\pi}Mg\cos\theta + \frac{R}{2}mg\cos\varphi. \tag{4}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
MR^2\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)\ddot{\theta}+MR^2\frac{4}{3\pi}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta+mR^2\ddot{\theta}& \\
-mR^2\frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi+mR^2\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi+MR\frac{4}{3\pi}g\operatorname{sen}\theta=0;& \quad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{4}mR^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}\cos\varphi+m\frac{R}{2}g\operatorname{sen}\varphi=0. \tag{6}
$$

Como integral primera se puede escribir la conservación de la energía $E=T+V$, al ser todas las fuerzas conservativas:

$$
\begin{aligned}
&E= \\
&\frac{1}{2}MR^2\left[\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right]\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2+\frac{\dot{\varphi}^2}{4}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right]-\frac{4R}{3\pi}Mg\cos\theta-\frac{R}{2}mg\cos\varphi. \quad (7)
\end{aligned}
$$

2.— La reacción N sobre la partícula se expresa mediante la ecuación dinámica de dicha partícula en dirección normal a la ranura, $\boldsymbol{n}$:

$$
N-mg\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}=m\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad N=mR\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi+m\frac{R}{2}\dot{\varphi}^2+mg\cos\varphi. \tag{8}
$$

3.— Para expresar las reacciones sobre el semidisco basta con plantear las ecuaciones dinámicas en direcciones x e y para el sistema completo:

$$
\begin{aligned}
&H=M\boldsymbol{a}_G\cdot\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{i} \\
&\quad\Downarrow \\
&H=MR\left[-\ddot{\theta}+\frac{4}{3\pi}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\right)\right]+mR\left[-\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right)\right];
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
V-(M+m)g&=M\boldsymbol{a}_G\cdot\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{j} \\
&\Downarrow \\
V&=(M+m)g+M\frac{4R}{3\pi}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)+m\frac{R}{2}\left(\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).
\end{aligned} \tag{10}
$$