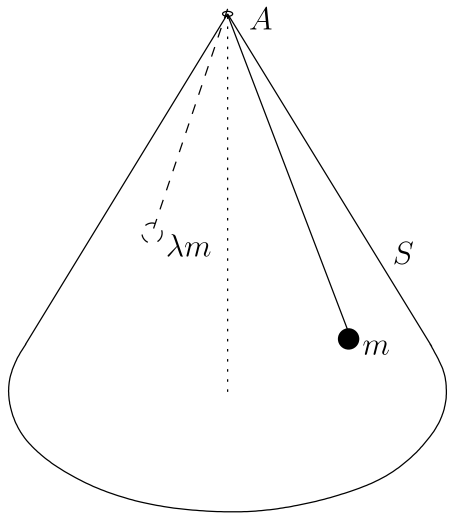
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25 ó 10/60) Tiempo: 60 min.

Dos partículas, de masas respectivas m y λm, están unidas mediante un hilo inextensible de longitud $2b$. Este hilo pasa por un pequeño agujero existente en el vértice A de una superficie cónica S fija, lisa, de eje vertical y semiángulo α. Mientras m permanece sobre la superficie S por debajo de A con ligadura unilateral lisa, la otra partícula λm pende libremente, permaneciendo en el volumen interior determinado por S. Se pide:



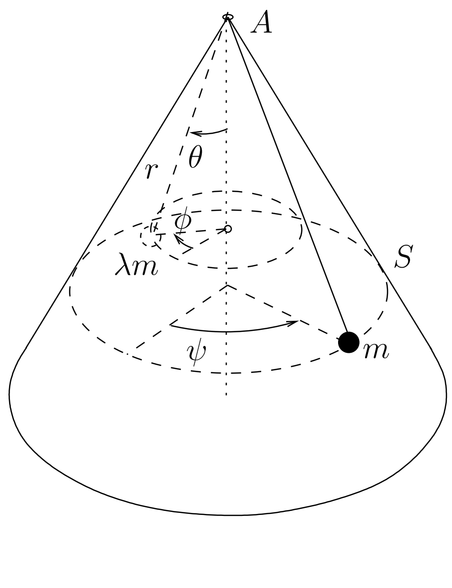
1. Suponiendo que el movimiento comienza con unas condiciones iniciales generales, a) Escoger unos parámetros adecuados para estudiarlo y determinar el n.º de grados de libertad; b) Obtener las integrales primeras que pudiera haber e interpretarlas físicamente; c) Obtener las ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento.

2. Suponemos ahora que inicialmente λm parte del reposo, a una distancia b en la vertical por debajo de A, y m tiene una velocidad v_0 con el hilo tenso. Encontrar los valores entre los que debe estar comprendido λ así como el valor adecuado de v_0 para que λm permanezca en reposo y m no se separe de S.

⋆

1.a) El sistema tiene 4 g.d.l., ya que de los 6 teóricos de dos partículas en 3D deben restarse dos restricciones, correspondientes a permanecer m sobre la superficie y la unión mediante el hilo inextensible.

Se escogen como parámetros las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) de la partícula λm, y el ángulo ψ de la partícula m.



En determinadas circunstancias especiales podría darse el caso de que no llegaran a activarse algunos de estos grados de libertad. Este sería el caso en que la partícula λm partiese del reposo desde la vertical de A, en cuyo caso si no hay fuerzas horizontales se mantendrá en dicha vertical. No es este el caso, ya que el enunciado advierte que el movimiento parte de unas «condiciones iniciales generales».

1.b) Todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total $T+V$:

$$\begin{aligned} T+V=C=\frac{1}{2}\lambda m[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\dot{\phi}^2]+\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(2b-r)^2\operatorname{sen}^2(\alpha)\dot{\psi}^2] \\ -\lambda mgr\cos\theta-mg(2b-r)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

La Lagrangiana del sistema es

$$\begin{aligned} L=\frac{1}{2}\lambda m[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\dot{\phi}^2]+\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(2b-r)^2\operatorname{sen}^2(\alpha)\dot{\psi}^2] \\ +\lambda mgr\cos\theta+mg(2b-r)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Se comprueba inmediatamente que no depende explícitamente ni de ϕ ni de ψ, por lo que ambos momentos generalizados son constantes:

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\lambda mr^2\operatorname{sen}^2(\theta)\dot{\phi}=\text{cte.} \tag{3}$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=m(2b-r)^2\operatorname{sen}^2(\alpha)\dot{\psi}=\text{cte.} \tag{4}$$

La ecuación (3) corresponde a la conservación del momento cinético de la partícula λm según el eje Az, respecto al cual las fuerzas exteriores no dan momentos. La (4) corresponde a la conservación del momento cinético de m respecto del eje Az, por idéntico motivo.

1.c) Derivando (2) se obtienen las ecuaciones de Lagrange, de las cuales sólo hace falta expresar las correspondientes a las coordenadas no cíclicas (r,θ):

$$(1+\lambda)m\ddot{r}-\lambda mr\left(\dot{\theta}^2+\operatorname{sen}^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)+m(2b-r)\operatorname{sen}^2(\alpha)\dot{\psi}^2-\lambda mg\cos\theta+mg\cos\alpha=0 \tag{5}$$

$$\lambda mr^2\ddot{\theta}+2\lambda mr\dot{r}\dot{\theta}-\lambda mr^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\dot{\phi}^2+\lambda mgr\operatorname{sen}\theta=0. \tag{6}$$

Las otras dos ecuaciones son las (3) y (4) antes expresadas.

2.— En este caso, λm se mantiene a lo largo del movimiento en la vertical, por lo que desaparecen los grados de libertad (θ,ϕ). Si λm está en reposo, será $\dot{r}_0=0$, y la velocidad de m habrá de ser horizontal, por lo que

$$v_0=(2b-\underbrace{r_0}_{b})\operatorname{sen}\alpha\dot{\psi}_0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\psi}_0=\frac{v_0}{b\operatorname{sen}\alpha}. \tag{7}$$

De la ecuación (4) se deduce que $\dot{\psi}$ ha de mantenerse constante con este valor ($\dot{\psi}=\dot{\psi}_0$). Sustituyendo (7) y $r=b$ en (5) resulta:

$$mb\operatorname{sen}^2(\alpha)\frac{v_0^2}{b^2\operatorname{sen}^2\alpha}-\lambda mg+mg\cos\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad v_0^2=bg(\lambda-\cos\alpha), \tag{8}$$

de donde se deduce $\lambda>\cos\alpha$.

Otra condición surge de que la partícula m permanezca sobre la superficie con el enlace unilateral. La expresión de la reacción N de la superficie sobre m es

$$N=mg\operatorname{sen}\alpha-m\frac{v_0^2}{b\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha.$$

La condición de enlace unilateral ($N \geq 0$) conduce a

$$v_0^2 \leq bg\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha},$$

y teniendo en cuenta (8), resulta $\lambda \leq 1/\cos \alpha$. En definitiva,

$$\boxed{\cos \alpha \leq \lambda \leq \frac{1}{\cos \alpha};} \qquad \boxed{v_0^2 = bg(\lambda - \cos \alpha).}$$