Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º bis (puntuación: 5/60) Tiempo: 25 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

El movimiento instantáneo de un sólido se puede describir como composición de dos rotaciones $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ de ejes distintos. a) *Discutir razonadamente* el tipo de movimiento resultante según que las rectas se corten, se crucen, o sean paralelas. b) Demostrar que, en el caso en que se crucen a una distancia $a \neq 0$, el eje del movimiento helicoidal tangente corta a la recta de mínima distancia en un punto y calcular el mismo.

a) Tomando como referencia un mismo punto para ambas rotaciones, el campo de velocidades resultante de las dos es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_O + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \boldsymbol{r}$. Por tanto la velocidad de rotación resultante es siempre $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Se plantea sin embargo la cuestión de si el movimiento es una rotación pura (si existe un punto de velocidad nula), una traslación (si $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$), o un movimiento helicoidal general.

1. *Ambos ejes se cortan.*— Queda claro que el punto de intersección tiene velocidad nula, por lo que el movimiento resultante es una rotación pura de velocidad $(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)$, cuyo eje pasa por dicho punto.

2. *Ambos ejes son paralelos.*— Puede considerarse un caso particular del anterior, cuando el punto de corte es impropio (en el ∞). En general resulta otra rotación paralela cuyo eje está situado a distancia $h = a\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$ del eje de $\boldsymbol{\omega_1}$, siendo a la distancia entre ejes. En el caso particular en que $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$ resulta una traslación de velocidad $\omega_1 a$.

3. *Ambos ejes se cruzan en el espacio.*— No hay, en general, puntos de velocidad nula, por lo que resulta un movimiento helicoidal tangente general, con velocidad de deslizamiento no nula y de rotación $(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)$.

b) Sea AB el segmento de mínima distancia, siendo A el pie en el eje $\boldsymbol{\omega}_1$ y B en $\boldsymbol{\omega}_2$. Llamaremos $\boldsymbol{k}$ al versor unitario según este segmento, $\overrightarrow{AB} = a\,\boldsymbol{k}$. Desarrollando la expresión general de un punto del EHT, relativa al punto A, resulta:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_A}{\Omega^2} = \frac{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \wedge (\boldsymbol{\omega_2} \wedge (-a\,\boldsymbol{k}))}{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)^2} = a\,\boldsymbol{k}\frac{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \boldsymbol{\omega}_2}{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)^2}.$$

Es decir, el EHT corta al segmento AB a la distancia $h = a\dfrac{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \boldsymbol{\omega}_2}{(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)^2}$ del punto A.

Como casos particulares pueden citarse: si las rotaciones son perpendiculares $(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 0)$, resulta $h = a\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$; Si por el contrario son paralelas, resulta $h = a\dfrac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$; Si ambas son iguales en módulo $(\omega_1 = \omega_2)$, resulta $h = a/2$, cualquiera que sea el ángulo que formen ambos vectores.