Mecánica

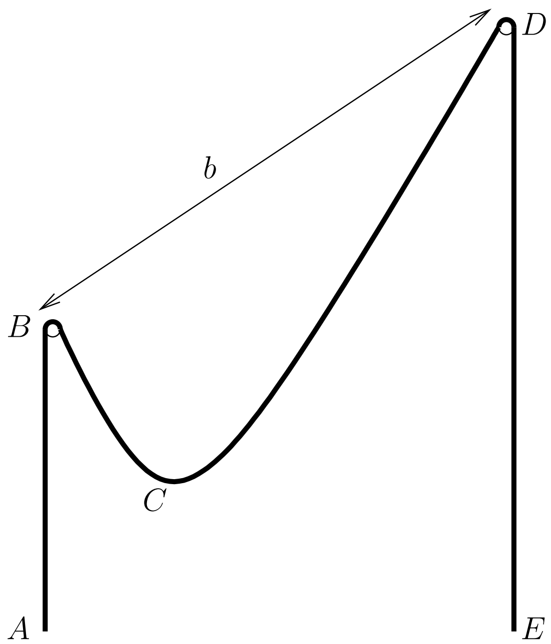
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Un hilo $ABCDE$ de peso uniforme q por unidad de longitud está en equilibrio pasando sobre dos pequeños clavos lisos (B y D) situados a distinta altura y que distan $\overline{BD} = b$. Se observa que

- El vértice C de la catenaria está a una altura media entre las del extremo A y el clavo B;
- La longitud del tramo AB es igual al desnivel entre B y D.

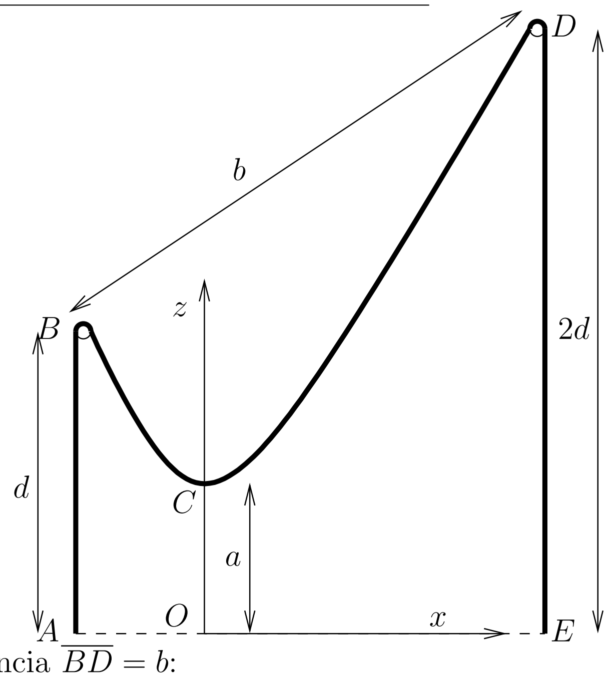


Se pide:

1. Longitud total del hilo (entre A y E).
2. Valores mínimos y máximos de su tensión.

★

1.— El hilo adopta entre B y D una catenaria de ecuación $z = a\cosh(x/a)$. El origen de coordenadas para esta expresión está en un punto O, situado en la vertical del vértice C a una distancia a por debajo del mismo. Sea $d = z_{AB} = z_{BD}$ el desnivel entre A y B y entre B y D. La tensión de la catenaria en B es $T_B = qz_B = qd$, por lo que el origen de la catenaria debe estar justamente a la altura del extremo A. Un razonamiento análogo respecto a la tensión en D conduce a que el otro extremo E también debe estar a la misma altura. Por último, el dato de que C está en la altura media entre A y B conduce a que $d = 2a$.



Expresamos el dato del enunciado de la distancia $\overline{BD} = b$:

$$b^2 = z_{BD}^2 + x_{BD}^2 = (2a)^2 + (x_D - x_B)^2;$$

$$z_B = 2a = a\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad x_B = -a\cosh^{-1}(2);$$

$$z_D = 4a = a\cosh\left(\frac{x_D}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad x_D = a\cosh^{-1}(4);$$

$$b = a\sqrt{4 + (\cosh^{-1}(4) + \cosh^{-1}(2))^2} = 3{,}9277a.$$

La longitud del hilo es $S = 2a + S_{BC} + S_{CD} + 4a$, donde se han contado las partes $2a$ y $4a$ que cuelgan en cada extremo. La longitud de los tramos de catenaria es

$$S_{BC} = \sqrt{z_B^2 - a^2} = a\sqrt{3}; \quad S_{CD} = \sqrt{z_D^2 - a^2} = a\sqrt{15};$$

por lo que resulta

$$S = a(6 + \sqrt{3} + \sqrt{15}) = b\frac{6 + \sqrt{3} + \sqrt{15}}{\sqrt{4 + (\cosh^{-1}(4) + \cosh^{-1}(2))^2}} = 2{,}9546b.$$

2.— La tensión máxima se produce en el punto de máxima cota, D:

$$T_D = qz_D = 4qa = qb\frac{4}{\sqrt{4 + (\cosh^{-1}(4) + \cosh^{-1}(2))^2}} = 1{,}0184qb.$$

La tensión mínima como es lógico se produce en los extremos A y E, en los que es nula. Dentro del tramo de catenaria, la tensión mínima es en el vértice C, donde vale

$$T_C = T_0 = qa = qb\frac{1}{\sqrt{4 + (\cosh^{-1}(4) + \cosh^{-1}(2))^2}} = 0{,}2546qb.$$