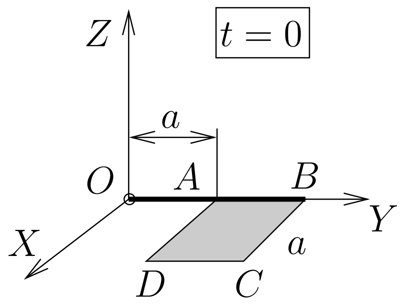
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 6.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido está formado por una placa cuadrada $ABCD$ pesada, de lado a y masa m y una varilla OB sin masa de longitud $2a$ que se encuentra articulada a un punto fijo O. El punto B está obligado a permanecer en el plano OYZ mediante una ligadura bilateral lisa. Además, la placa puede girar libremente alrededor de OB. En el instante inicial, el sólido parte del reposo desde el plano horizontal que pasa por O, tal y como muestra la figura adjunta.



Se pide:

1. Expresión del tensor de inercia en O referido a un sistema de ejes ligados al sólido.
2. Determinar el número de grados de libertad del sistema, seleccionando justificadamente un conjunto adecuado de parámetros que permita estudiar el movimiento.
3. Expresión del momento en O de las fuerzas que actúan sobre el sólido (tanto activas como reactivas) en una configuración genérica.
4. Expresión de las ecuaciones de Euler del movimiento del sólido.

1.- Escogemos un sistema de ejes $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligados al sólido con origen en el punto fijo O, de forma que el versor $\boldsymbol{j}$ lleva la dirección de OB, $\boldsymbol{k}$ es perpendicular a la placa e $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a ambos y está contenido en el plano de la placa. Este sistema coincide en el instante inicial con el sistema fijo $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ que es el que se muestra en la figura del enunciado.

Aplicando la expresión del campo tensional de inercia, podemos relacionar el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ con $\boldsymbol{I}_G$:

$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_G + m(OG^2\mathbf{1} - \boldsymbol{OG} \otimes \boldsymbol{OG}) \tag{1}$$

El tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ expresado en el sistema de ejes cuerpo toma la forma:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \; ; \qquad A = \frac{1}{12}ma^2 \; , \quad B = \frac{1}{6}ma^2 \; ,$$

y las coordenadas del vector $\boldsymbol{OG}$ son $(a/2, 3a/2, 0)$ en el mismo sistema de referencia, por lo que aplicando la expresión (1) obtenemos el tensor de inercia en O:

$$\boldsymbol{I}_O = ma^2 \begin{pmatrix} 7/3 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

2.- La configuración de la varilla OB está determinada por su posición dentro del plano vertical fijo OYZ, y la placa por su giro alrededor de OB, por lo que el sólido tiene dos grados de libertad. Escogemos como parámetros el ángulo θ que forma la varilla con la horizontal (rotación $(-\dot{\theta})$ alrededor del eje fijo $\boldsymbol{I}$) y el ángulo φ que gira la placa alrededor de OB (rotación $\dot{\varphi}$ alrededor del eje móvil $\boldsymbol{j}$).

3.- El momento total en O se puede expresar como la suma del momento originado por el peso más el de la reacción:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_{O_{peso}} + \boldsymbol{M}_{O_{reac}} = \boldsymbol{r}_G \wedge (-mg\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{OB} \wedge (R\boldsymbol{I}) \tag{2}$$

donde se ha tenido en cuenta que la restricción impuesta al movimiento se materializa mediante una única fuerza de módulo R aplicada en el punto B en dirección del movimiento impedido.

Puesto que en el apartado 4 se piden las ecuaciones de Euler y en el apartado 1 se ha obtenido el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ expresado en el sistema de ejes cuerpo $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, es conveniente expresar también $\boldsymbol{M}_O$ en el mismo sistema del cuerpo.

Para ello resulta conveniente definir un sistema auxiliar móvil $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{u})$ que no está ligado al sólido, de forma que el vector $\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{j}$ y por tanto permanece contenido en todo momento en el plano fijo vertical OYZ en el que se mueve la varilla. En la Figura 1 se muestran varias vistas de estos sistemas de referencia que ayudan a comprender la relación geométrica entre ellos.

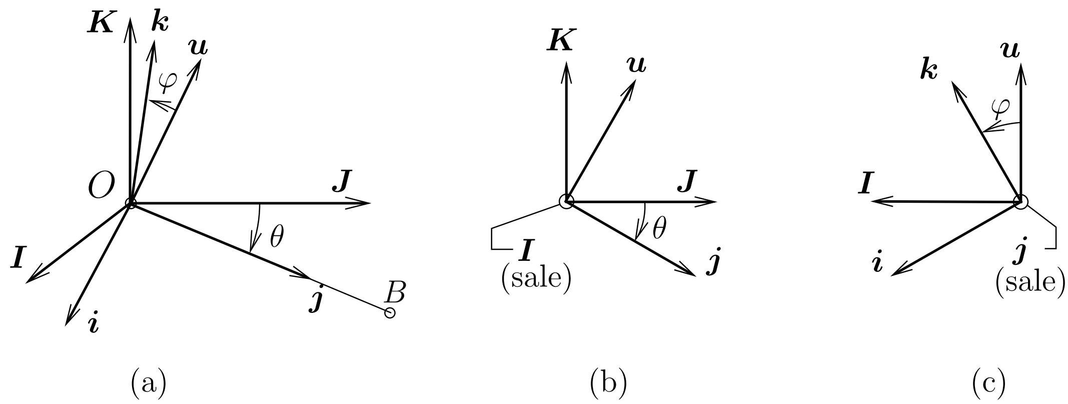


Figura 1: *Distintas vistas de los sistemas de referencia empleados. (a) Vista en perspectiva; (b) Vista del plano $O\boldsymbol{JK}$ abatido; (c) Vista del plano $O\boldsymbol{Iu}$ abatido.*

Con la ayuda de estas figuras pueden deducirse las relaciones:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} && (3)\\
\boldsymbol{u} &= \cos\varphi\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} && (4)\\
\boldsymbol{K} &= \cos\theta\boldsymbol{u} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{k} && (5)
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\boldsymbol{r}_G$ y $\boldsymbol{OB}$ se expresan en el triedro del cuerpo como:

$$\boldsymbol{r}_G = (a/2)\boldsymbol{i} + (3a/2)\boldsymbol{j}\ ; \qquad \boldsymbol{OB} = 2a\boldsymbol{j} \tag{6}$$

Combinando las expresiones (2) (3), (4), (5) y (6), se obtiene el momento pedido:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O = &\left(-mg\frac{3a}{2}\cos\theta\cos\varphi + 2aR\operatorname{sen}\varphi\right)\boldsymbol{i}\\
&+ \left(mg\frac{a}{2}\cos\theta\cos\varphi\right)\boldsymbol{j} + \left[mg\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{3a}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right) - 2aR\cos\varphi\right]\boldsymbol{k} \qquad (7)
\end{aligned}$$

4.- Las ecuaciones de Euler tienen la expresión general:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O\ ; \qquad \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{8}$$

siendo $\boldsymbol{\Omega}$ el vector velocidad angular del sólido. El movimiento de éste se puede descomponer en un giro alrededor del eje fijo $\boldsymbol{I}$ más un giro alrededor del eje móvil $\boldsymbol{j}$. Teniendo en cuenta la relación (3) y el tensor de inercia calculado en el primer apartado, obtenemos $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{H}_O$ expresados en el sistema de ejes cuerpo:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot\theta \boldsymbol{I} + \dot\varphi \boldsymbol{j} = -\dot\theta\cos\varphi \boldsymbol{i} + \dot\varphi\boldsymbol{j} - \dot\theta \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{k} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{H}_O = -ma^2\left(\frac{7}{3}\dot\theta\cos\varphi + \frac{3}{4}\dot\varphi\right)\boldsymbol{i} + ma^2\left(\frac{3}{4}\dot\theta\cos\varphi + \frac{1}{3}\dot\varphi\right)\boldsymbol{j} - ma^2\frac{8}{3}\dot\theta\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} \tag{10}$$

Realizamos la derivada de $\boldsymbol{H}_O$ a partir de la derivada relativa al observador móvil que se mueve con el sólido, mediante la relación:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_O \tag{11}$$

Empleando simultaneamente las expresiones (8), (9), (10), (11) y (7), se obtienen las ecuaciones de Euler pedidas:

$$ma^2\left(-\frac{7}{3}\ddot\theta\cos\varphi - \frac{3}{4}\ddot\varphi + \frac{3}{4}\dot\theta^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) = -mg\frac{3a}{2}\cos\theta\cos\varphi + 2aR\operatorname{sen}\varphi \tag{12}$$

$$ma^2\left(\frac{3}{4}\ddot\theta\cos\varphi + \frac{1}{3}\ddot\varphi - \frac{1}{3}\dot\theta^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) = mg\frac{a}{2}\cos\theta\cos\varphi \tag{13}$$

$$ma^2\left(-\frac{8}{3}\ddot\theta\operatorname{sen}\varphi - \frac{2}{3}\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi - \frac{3}{4}\dot\theta^2\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\dot\varphi^2\right) = mg\frac{a}{2}\left(\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\right) - 2aR\cos\varphi \tag{14}$$

Por último, es posible eliminar la reacción R entre (12) y (14), obteniéndose la ecuación:

$$ma^2\left[\frac{2}{3}\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \frac{3}{4}\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi + \ddot\theta\frac{1}{3}(7+\operatorname{sen}^2\varphi) + \frac{3}{4}\ddot\varphi\cos\varphi\right] = mga\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\right)\ , \tag{15}$$

que junto a la expresión (13) forma el sistema de dos ecuaciones diferenciales en (θ, φ) que representa el movimiento del sólido.