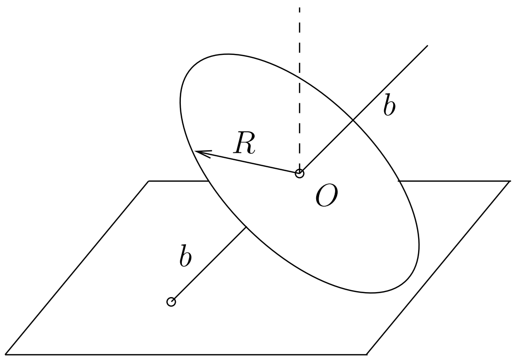
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (31 de marzo de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

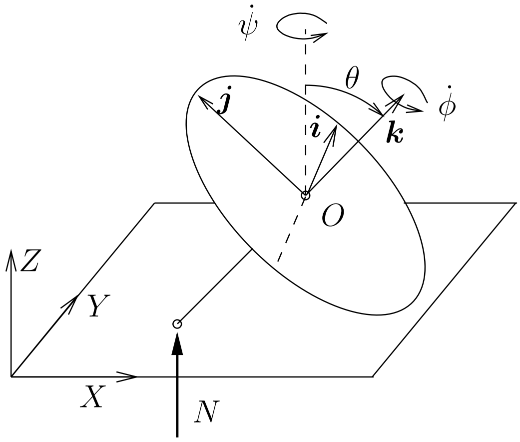
Un sólido está formado por un disco homogéneo de espesor despreciable, masa M y radio R, soldado a una varilla rígida sin masa de longitud $2b$ unida ortogonalmente al disco por el centro O de ambos sólidos. La varilla se apoya por un extremo sobre un suelo liso horizontal, sobre el que puede deslizar libremente. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento general del sólido, supuesto que no llegue a tocar el borde del disco con el suelo.
2. Integrales primeras del movimiento y su interpretación física.
3. Obtener la expresión del valor de la reacción del suelo, en función exclusivamente de θ y su derivada $\dot\theta$.

1.— El sólido está sometido a una sola ligadura, la permanencia del extremo de la varilla sobre el plano, por lo que tendrá en principio 5 grados de libertad. Denominaremos (X, Y) a las coordenadas en el plano horizontal del centro del disco O, y Z a la coordenada vertical de dicho centro. Las demás coordenadas generalizadas son los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ). En función de estos parámetros la ligadura se expresa como

$$Z = b\cos\theta. \tag{1}$$



Tomaremos para desarrollar las expresiones un triedro *intermedio*, en el que el eje Oz es el de revolución del disco, el Ox coincide con un radio horizontal, y Oy con uno de máxima pendiente. Este triedro acompaña al sólido en su movimiento salvo en la rotación propia ϕ. Las componentes de la velocidad angular en el mismo son $\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + (\dot\phi + \dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{k}$.

El tensor de inercia es diagonal en el triedro definido,

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}; \qquad A = \frac{1}{4}MR^2; \quad C = \frac{1}{2}MR^2. \tag{2}$$

La Lagrangiana vendrá expresada por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M{v_O}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}) - V \\ &= \frac{1}{2}M(\dot X^2 + \dot Y^2 + b^2\dot\theta^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}\left[A\dot\theta^2 + A\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta + Cr^2\right] - Mgb\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

siendo $r = (\dot\phi + \dot\psi\cos\theta)$. De las 5 coordenadas, 4 son cíclicas:

$$p_X = \text{cte.} \quad\Rightarrow\quad \dot X = \text{cte.} \tag{4}$$
$$p_Y = \text{cte.} \quad\Rightarrow\quad \dot Y = \text{cte.} \tag{5}$$
$$p_\psi = \text{cte.} \quad\Rightarrow\quad H = A\dot\psi\,\text{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = \text{cte.} \tag{6}$$
$$p_\phi = \text{cte.} \quad\Rightarrow\quad r = \text{cte.} \tag{7}$$

Las dos primeras ecuaciones puede considerarse que "eliminan" las variables (X, Y), que pasan a ser constantes. La única coordenada no cíclica es θ, la ecuación de Lagrange es

$$(A + Mb^2\,\text{sen}^2\theta)\ddot\theta + Mb^2\dot\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - A\dot\psi^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + Cr\dot\psi\,\text{sen}\,\theta - Mgb\,\text{sen}\,\theta = 0. \tag{8}$$

En esta ecuación se puede eliminar $\dot\psi$, quedando en función de θ exclusivamente,

$$\begin{aligned}(A + Mb^2\,\text{sen}^2\theta)\ddot\theta &+ Mb^2\dot\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ &- \frac{(H - Cr\cos\theta)^2}{A\,\text{sen}^3\theta}\cos\theta + \frac{Cr}{A}\frac{(H - Cr\cos\theta)}{\text{sen}\,\theta} - Mgb\,\text{sen}\,\theta = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Las ecuaciones del problema son entonces (6, 7, 8), para las incógnitas (ψ, θ, ϕ).

2.— Ya se han expresado las integrales primeras debidas a coordenadas cíclicas, ecuaciones (4, 5, 6, 7). Las dos primeras expresan la conservación de la cantidad de movimiento en las dos direcciones horizontales; la tercera la conservación del momento cinético según el eje vertical, y la cuarta la conservación del mismo según el eje de revolución del disco.

Otra integral primera se debe a la conservación de la energía,

$$\begin{aligned}E' &= T + V - \frac{1}{2}M(\dot X^2 + \dot Y^2) - \frac{1}{2}Cr^2 \\ &= \frac{1}{2}Mb^2\dot\theta^2\,\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\left[A\dot\theta^2 + A\dot\psi^2\,\text{sen}^2\theta\right] + Mgb\cos\theta\end{aligned} \tag{10}$$

Esta ecuación también se puede poner en función de θ tan sólo,

$$E' = \frac{1}{2}Mb^2\dot\theta^2\,\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}A\dot\theta^2 + \frac{(H - Cr\cos\theta)^2}{2A\,\text{sen}^2\theta} + Mgb\cos\theta \tag{11}$$

Derivando esta última ecuación se obtendría una de segundo orden equivalente a (9).

3.— Para calcular la reacción del suelo basta con expresar el balance de cantidad de movimiento en dirección vertical:

$$N = Mg + M\ddot Z = Mg - Mb(\ddot\theta\,\text{sen}\,\theta + \dot\theta^2\cos\theta). \tag{12}$$

Podemos eliminar de esta ecuación $\ddot\theta$ mediante (9):

$$\begin{aligned}N = Mg - Mb\dot\theta^2\cos\theta - \frac{Mb\,\text{sen}\,\theta}{A + Mb^2\,\text{sen}^2\theta}\Big[&-Mb^2\dot\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ &+\frac{(H - Cr\cos\theta)^2}{A\,\text{sen}^3\theta}\cos\theta - \frac{Cr}{A}\frac{(H - Cr\cos\theta)}{\text{sen}\,\theta} + Mgb\,\text{sen}\,\theta\Big]\end{aligned} \tag{13}$$

Nota adicional.— Otra forma de proceder sería mediante las ecuaciones de Euler, empleando para ello la derivada relativa al triedro intermedio:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\phi}\boldsymbol{k}) \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \tag{14}$$

Desarrollando las componentes,

$$Nb \operatorname{sen}\theta = A\ddot{\theta} + Cr\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta - A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta; \tag{15}$$

$$0 = A\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - Cr\dot{\theta}; \tag{16}$$

$$0 = C\dot{r}. \tag{17}$$