Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

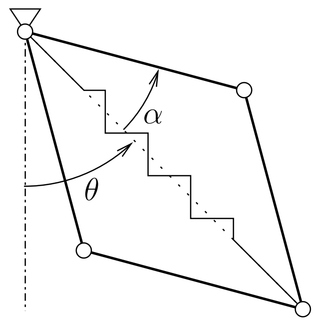
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (14 de junio de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

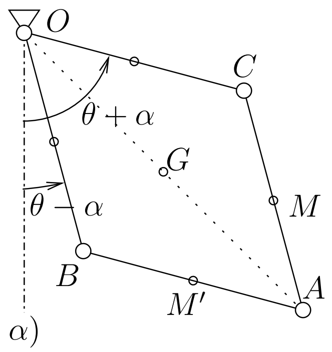
El dispositivo de la figura adjunta está formado por cuatro barras pesadas articuladas entre sí, de longitud a y masa m cada una, de forma que están contenidas en un mismo plano vertical. El conjunto se halla sujeto por uno de sus vértices a un punto fijo. Asimismo, en la diagonal entre este vértice de anclaje y el opuesto se sitúa un resorte lineal de longitud natural $l_0 = a/2$ y constante k. El valor de $k = 4mg/a$ es tal que el sistema está en equilibrio estable con el eje del resorte vertical y $\alpha = 60°$. Se pide:



1. Desarrollar la expresión de la energía cinética del sistema, demostrando que vale $T = \frac{5}{3}ma^2(\dot\theta^2 + \dot\alpha^2) + ma^2(\dot\theta^2 - \dot\alpha^2)\cos 2\alpha$
2. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica.
3. Suponiendo que el movimiento consiste en pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equlibrio estable, linealizar las ecuaciones del movimiento.
4. Calcular los modos normales de vibración y las frecuencias propias.

———————————— ⋆ ————————————

1.— La energía cinética la obtendremos como suma de las distintas barras. En primer lugar, la de las barras OC y OB es inmediata al tratarse de rotaciones con punto fijo:



$$T_{OB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)(\dot\theta - \dot\alpha)^2; \quad T_{OC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)(\dot\theta + \dot\alpha)^2$$

Para las barras CA, BA determinamos en primer lugar las velocidades de sus centros M, M':

$$x_M = a\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha) + \frac{a}{2}\mathrm{sen}(\theta-\alpha); \quad y_M = -a\cos(\theta+\alpha) - \frac{a}{2}\cos(\theta-\alpha)$$

$$x_{M'} = a\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha) + \frac{a}{2}\mathrm{sen}(\theta+\alpha); \quad y_{M'} = -a\cos(\theta-\alpha) - \frac{a}{2}\cos(\theta+\alpha)$$

$$\dot x_M = a(\dot\theta+\dot\alpha)\cos(\theta+\alpha) + \frac{a}{2}(\dot\theta-\dot\alpha)\cos(\theta-\alpha); \; \dot y_M = a(\dot\theta+\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha) + \frac{a}{2}(\dot\theta-\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)$$

$$\dot x_{M'} = a(\dot\theta-\dot\alpha)\cos(\theta-\alpha) + \frac{a}{2}(\dot\theta+\dot\alpha)\cos(\theta+\alpha); \; \dot y_{M'} = a(\dot\theta-\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha) + \frac{a}{2}(\dot\theta+\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha)$$

$$v_M^2 = \dot x_M^2 + \dot y_M^2 = a^2(\dot\theta+\dot\alpha)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2(\dot\theta-\dot\alpha)^2 + a^2(\dot\theta^2-\dot\alpha^2)\cos[\underbrace{(\theta+\alpha)-(\theta-\alpha)}_{=2\alpha}]$$

$$v_{M'}^2 = \dot x_{M'}^2 + \dot y_{M'}^2 = a^2(\dot\theta-\dot\alpha)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2(\dot\theta+\dot\alpha)^2 + a^2(\dot\theta^2-\dot\alpha^2)\cos[\underbrace{(\theta-\alpha)-(\theta+\alpha)}_{=-2\alpha}]$$

Sumando la energía cinética de rotación de cada barra obtenemos:

$$T_{CA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)(\dot\theta - \dot\alpha)^2 + \frac{1}{2}ma^2(\dot\theta + \dot\alpha)^2 + \frac{1}{2}ma^2(\dot\theta^2 - \dot\alpha^2)\cos 2\alpha$$
$$T_{BA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)(\dot\theta + \dot\alpha)^2 + \frac{1}{2}ma^2(\dot\theta - \dot\alpha)^2 + \frac{1}{2}ma^2(\dot\theta^2 - \dot\alpha^2)\cos 2\alpha$$

Finalmente, sumando para todas las barras:

$$\begin{aligned} T = T_{OB} + T_{OC} + T_{CA} + T_{BA} &= \frac{5}{6}ma^2(\dot\theta + \dot\alpha)^2 + \frac{5}{6}ma^2(\dot\theta - \dot\alpha)^2 + ma^2(\dot\theta^2 - \dot\alpha^2)\cos 2\alpha \\ &= \frac{5}{3}ma^2(\dot\theta^2 + \dot\alpha^2) + ma^2(\dot\theta^2 - \dot\alpha^2)\cos 2\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

como se quería demostrar.

2.— Desarrollaremos las ecuaciones por el método de Lagrange. En primer lugar, obtenemos el potencial, suma del gravitatorio y del resorte:

$$V = 4my_G + \frac{1}{2}k\left(\overline{OA} - \frac{a}{2}\right)^2 = 4mga\cos\alpha\cos\theta + 2mga\left(2\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Mediante las expresiones (1) y (2) se obtiene la Lagrangiana $L = T - V$, y a partir de ésta, las ecuaciones de Lagrange:

$$0 = \frac{10}{3}ma^2\ddot\theta + 2ma^2\ddot\theta\cos 2\alpha - 4ma^2\dot\theta\dot\alpha \operatorname{sen} 2\alpha + 4mga\cos\alpha \operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 = {}& \frac{10}{3}ma^2\ddot\alpha - 2ma^2\ddot\alpha\cos 2\alpha + 2ma^2 \operatorname{sen} 2\alpha(\dot\alpha^2 + \dot\theta^2) + 4mga \operatorname{sen}\alpha\cos\theta \\ & - 8mga \operatorname{sen}\alpha\left(2\cos\alpha - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

3.— La posición de equilibrio estable es $\theta = 0$, $\alpha = \pi/3$, como se indica en el enunciado y es fácil comprobar. Para efectuar la linealización cambiamos a la variable $\varphi = \alpha - \pi/3$, cuyo valor será pequeño para posiciones cercanas al equilibrio. Para sustituir en las ecuaciones de la dinámica, tenemos en cuenta que

$$\cos 2\alpha = \cos\frac{2\pi}{3}\cos 2\varphi - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen} 2\varphi \approx -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\varphi;$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos 2\varphi + \cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen} 2\varphi \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \varphi;$$
$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3}\cos\varphi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\varphi \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\varphi; \quad \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\varphi \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\varphi.$$

Sustituyendo y linealizando resulta:

$$\frac{7}{3}ma^2\ddot\theta + 2mga\theta = 0 \tag{5}$$
$$\frac{13}{3}ma^2\ddot\varphi + 12mga\varphi = 0 \tag{6}$$

4.— Las ecuaciones linealizadas (5), (6) resultan desacopladas, por lo que los modos de vibración coinciden con las coordenadas tomadas, y las frecuencias propias se deducen inmediatamente de cada ecuación:

$$\mathbf{a}_\theta = (1, 0), \quad \omega_\theta = \sqrt{6/7}\sqrt{g/a}; \qquad \mathbf{a}_\varphi = (0, 1), \quad \omega_\varphi = \sqrt{36/13}\sqrt{g/a}.$$