Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (14 de junio de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

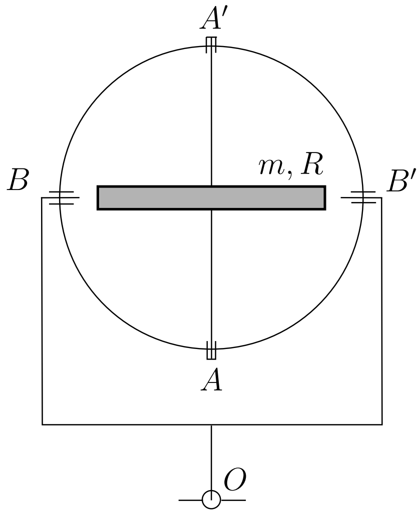
Ejercicio 3.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Un sistema está compuesto por un disco de masa m y radio R y un mecanismo de suspensión de masa despreciable que lo soporta de la forma que se expone a continuación.

El eje AA' perpendicular al disco por su centro es el diámetro de un aro que tiene radio suficiente para alojar a dicho disco. Este aro se articula a un bastidor en forma de U en los puntos BB', de forma que las direcciones definidas por AA' y BB' son perpendiculares. Por último, el bastidor está articulado en su base a un punto fijo O, que se encuentra a una distancia L del centro del disco. El aro incorpora un pequeño motor que impone al disco una velocidad de giro relativa al aro constante de valor ω_0. A su vez, el aro puede girar libremente alrededor del eje BB', y el bastidor en U sólo puede moverse girando alrededor de O contenido en todo momento en un plano vertical fijo.

Inicialmente la configuración del mecanismo es la de la Figura adjunta, con el disco girando con velocidad ω_0 alrededor del eje AA' vertical y el aro en reposo totalmente contenido en el mismo plano vertical que el bastidor en U.

En un cierto instante se produce una perturbación de magnitud arbitraria de forma que el eje AA' se aparta de la vertical y el mecanismo adquiere un movimiento general.



Se pide:

1. Expresión de la velocidad angular del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento del disco;
3. Calcular el par que debe ejercer el motor para imponer la velocidad de giro del disco relativa al aro ω_0 constante, en una posición genérica.

1.- En primer lugar, seleccionamos un triedro de referencia adecuado para expresar $\boldsymbol{\Omega}$. Este triedro es el $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección del eje BB', el versor $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección del eje AA' y $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los dos anteriores definiendo un triedro a derechas (ver Figura 1). Este sistema de referencia no está ligado al disco, puesto que no comparte con éste el giro relativo al aro en dirección AA'. No obstante, es adecuado puesto que el tensor de inercia del sistema se expresa en él mediante una matriz constante.

Para facilitar los razonamientos geométricos introducimos adicionalmente un sistema de referencia auxiliar $(O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$, de forma que $\boldsymbol{i}_1 \equiv \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}_1$ está contenido siempre en el plano vertical fijo y lleva la dirección del segmento que une el punto fijo O y el centro G del disco, y $\boldsymbol{j}_1$ es perpendicular a los otros dos, siendo por tanto un vector horizontal y fijo (ver de nuevo Figura 1).

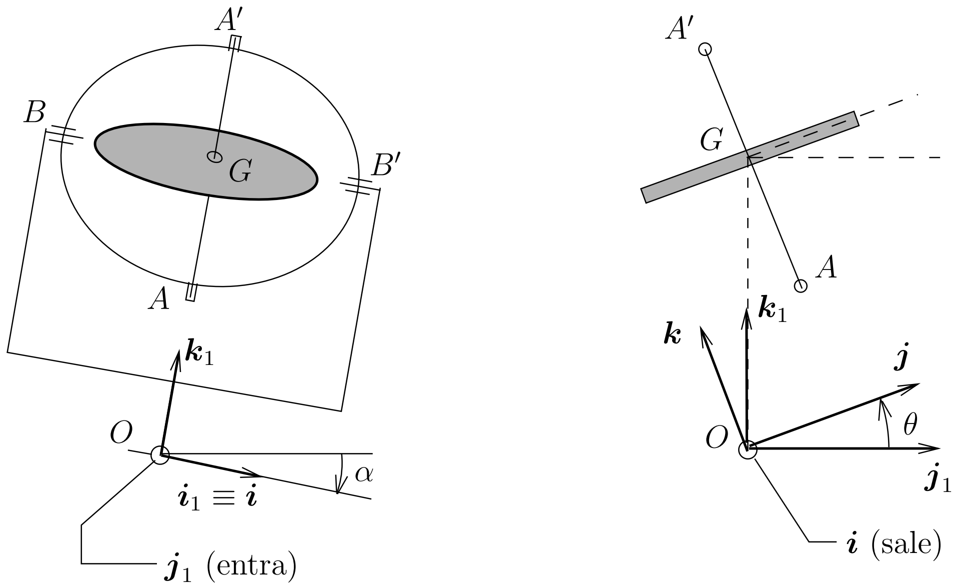


Figura 1: *Dos vistas ortogonales del sistema en una posición genérica*

El sistema tiene dos grados de libertad, y su movimiento general se puede descomponer en un giro $\dot{\alpha}$ del bastidor en U alrededor de $\boldsymbol{j}_1$, un giro $\dot{\theta}$ del aro alrededor de $\boldsymbol{i}$ y un giro ω_0 del disco alrededor de $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\alpha}\boldsymbol{j}_1 + \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \omega_0\boldsymbol{k} \tag{1}$$

En la expresión anterior se ha aplicado el hecho de que la velocidad relativa del disco respecto del aro es un vector que está dirigido según $\boldsymbol{k}$ exclusivamente, y que el enunciado especifica que tiene módulo ω_0 constante. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{j}_1 = \cos\theta\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$, se obtiene la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro intermedio $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\alpha}\cos\theta\boldsymbol{j} + (\omega_0 - \dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

Es interesante observar en esta última expresión que la componente según $\boldsymbol{k}$ de la velocidad angular total $\boldsymbol{\Omega}$ no es constante; sólo lo es la relativa al aro (ω_0), tal y como especifica el enunciado.

2.- Una forma de obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento es mediante el formalismo de la mecánica analítica. La Lagrangiana toma la forma:

$$L = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} - V$$

Es importante observar que no es posible expresar la energía cinética como $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}$, puesto que el punto O, aunque tiene velocidad nula, no pertenece al disco.

La expresión de la velocidad del centro de masa es $\boldsymbol{v}_G = L\dot{\alpha}\boldsymbol{i}$, y la del tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ es:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad , \qquad A = \frac{1}{4}mR^2 \ , \quad C = 2A = \frac{1}{2}mR^2$$

Tomando como origen de potencial el plano horizontal que pasa por el punto fijo O, la expresión final de la Lagrangiana resulta:

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}A\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\theta + 2(\omega_0 - \dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta)^2\right] - mgL\cos\alpha \tag{3}$$

Las ecuaciones de Lagrange correspondientes resultan:

$$\ddot{\alpha}\left[A(1+\operatorname{sen}^2\theta) + mL^2\right] + 2A\dot{\theta}\cos\theta(\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta - \omega_0) - mgL\operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{4}$$

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\alpha}\omega_0\cos\theta - \dot{\alpha}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \tag{5}$$

Una forma alternativa de haber obtenido las ecuaciones del movimiento es mediante las correspondientes ecuaciones de Euler de todo el sistema (disco más sistema de suspensión) en el punto fijo O:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O \tag{6}$$

donde

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO} \tag{7}$$

De nuevo, es importante observar que no es correcto expresar $\boldsymbol{H}_O$ como $\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$, puesto que el punto O no es un punto material del disco.

La derivada temporal de $\boldsymbol{H}_O$ se evalúa haciendo uso del sistema de referencia intermedio $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + (\boldsymbol{\Omega} - \omega_0\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{H}_O \tag{8}$$

Por otro lado, el momento de las fuerzas externas al sistema en O se compone de un término originado por el peso y un momento reactivo según $\boldsymbol{k}_1$ que impide que el bastidor salga del plano vertical fijo en el que está obligado a moverse (según $\boldsymbol{i}_1$ el momento es nulo, ya que el aro puede girar alrededor de BB' y el bastidor no tiene inercia):

$$\boldsymbol{M}_O = mgL\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{j}_1 + M\boldsymbol{k}_1 = (M\operatorname{sen}\theta + mgL\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)\boldsymbol{j} + (M\cos\theta - mgL\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k} \tag{9}$$

Haciendo uso de las expresiones (6), (7), (8) y (9), se obtienen las ecuaciones de Euler:

$$A\ddot{\theta} + 2A\dot{\alpha}\omega_0\cos\theta - A\dot{\alpha}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \tag{10}$$

$$(A + mL^2)\ddot{\alpha}\cos\theta - 2A\dot{\theta}\omega_0 = M\operatorname{sen}\theta + mgL\operatorname{sen}\alpha\cos\theta \tag{11}$$

$$-(2A + mL^2)\ddot{\alpha}\operatorname{sen}\theta - 2A\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos\theta = M\cos\theta - mgL\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \tag{12}$$

Puede comprobarse que la ecuación (10) coincide con la ecuación de Lagrange (5), y que la ecuación de Lagrange (4) se obtiene eliminando el par de restricción M entre las ecuaciones (11) y (12).

3.- Para calcular el par motor, introducimos un nuevo grado de libertad φ que representa el ángulo girado por el disco respecto del aro.

La nueva Lagrangiana se obtiene simplemente sustituyendo en (3) ω_0 por $\dot{\varphi}$:

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}A\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\theta + 2(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta)^2\right] - mgL\cos\alpha$$

La correspondiente ecuación de Lagrange en φ, después de particularizar para $\dot{\varphi} = \omega_0, \ddot{\varphi} = 0$, resulta:

$$-2A(\operatorname{sen}\theta\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\theta}\cos\theta) = Q_\varphi$$

siendo Q_φ la fuerza generalizada correspondiente al parámetro φ, que coincide con el par motor buscado.