Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de junio de 2001)

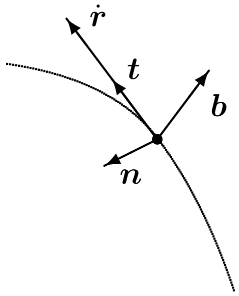
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Definir el triedro intrínseco a una curva. *Deducir* las expresiones de las componentes de la velocidad y aceleración de un punto en el triedro intrínseco a la trayectoria del mismo. *Aplicación* para una partícula que se mueve según una hélice, de ecuación en coordenadas cilíndricas $\rho = a, \theta = \theta(t), z = b\theta$, calculando el triedro intrínseco, el radio de curvatura y las componentes intrínsecas de velocidad y aceleración. (5 ptos.)

la trayectoria se puede definir como una ecuación horaria en función del tiempo, $\boldsymbol{r}(t)$, o bien parametrizada en función del arco, $\boldsymbol{r}(s)$. El triedro intríseco está definido por:



- *tangente* $\boldsymbol{t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$, vector unitario con igual dirección y sentido que la velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}$.
- *normal principal* $\boldsymbol{n}$, vector unitario normal a la curva ($\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$), perteneciente al plano definido por dos tangentes sucesivas a la curva, $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{t} + \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ (sentido hacia $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, lado cóncavo de la curva).
- *binormal* $\boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$.

Derivando se deduce la expresión para la velocidad:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t} = v\,\boldsymbol{t},$$

relación que expresa simplemente que la velocidad es tangente a la trayectoria. Derivando de nuevo y teniendo en cuenta la fórmula de Frenet ($\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s = \boldsymbol{n}/R$),

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{v}\,\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

En esta expresión el primer término ($\dot{v}\boldsymbol{t}$) corresponde a la *aceleración tangencial*, y el segundo ($\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$) se denomina *aceleración normal o centrípeta.*

Aplicación.— Definiendo la hélice en cilíndricas con el triedro $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$, y teniendo en cuenta las derivadas de estos versores $\dot{\boldsymbol{u}}_\rho = \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta,\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\rho$:

$$\boldsymbol{r} = a\,\boldsymbol{u}_\rho + z\,\boldsymbol{k}; \quad \dot{\boldsymbol{r}} = a\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + b\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = -a\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{u}_\rho + a\ddot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + b\ddot{\theta}\,\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\,\boldsymbol{u}_\theta + b\,\boldsymbol{k}); \quad \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}t|} = -\boldsymbol{u}_\rho; \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b\,\boldsymbol{u}_\theta + a\,\boldsymbol{k}).$$

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}t|}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{a}{a^2+b^2}; \quad \dot{\boldsymbol{r}} = v\,\boldsymbol{t} = \dot{\theta}\sqrt{a^2+b^2}\,\boldsymbol{t}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{v}\,\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{R}\,\boldsymbol{n} = \ddot{\theta}\sqrt{a^2+b^2}\,\boldsymbol{t} + \dot{\theta}^2 a\,\boldsymbol{n}.$$

Sea un sistema mecánico general. *Deducir* la expresión del teorema de Koenig para la energía cinética, en función de la energía cinética relativa al centro de masa. *Expresar* el principio de la energía cinética. En el caso de un sistema aislado, *responder razonadamente* si se conserva con carácter general la energía cinética, o bien si esta conservación se produce para cierto tipo de sistema, o bien si no puede asegurarse dicha conservación en ningún caso. (5 ptos.)

Teorema de Koenig.— Calculamos la relación entre las medidas de la energía cinética T (absoluta) y T^{SCM} (relativa al Sistema del Centro de Masa G, con las velocidades relativas al mismo $\boldsymbol{\nu}_i$):

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \nu_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{=\boldsymbol{0}} \cdot \boldsymbol{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}}$$

(*Teorema de König*)

La energía cinética del sistema se puede descomponer por tanto en la suma de la de una partícula con toda la masa M que se moviera con G, más la energía cinética relativa al S.C.M. El primer sumando se puede interpretar como el debido al movimiento de traslación del sistema, mientras que el segundo corresponde al movimiento relativo al centro de masa.

Principio de la energía cinética.— Denominando a las parejas de fuerzas internas entre cada dos partículas $\boldsymbol{F}_{ij}$:

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(ext)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{\text{int}}} . = \mathrm{d}W^{\text{ext}} + \mathrm{d}W^{\text{int}}$$

Sistema aislado.— En este caso no hay fuerzas exteriores y por tanto $\mathrm{d}W^{\text{ext}} = 0$. Admitiendo que las fuerzas internas son centrales, el trabajo de las mismas se anula para los movimientos de sólido rígido, pero no necesariamente para los que provoquen *distorsión* o *estiramiento* entre las partículas. Por tanto, con carácter general sólo se conservaría la energía cinética para un sistema que sea un *sólido rígido.* En cualquier otro caso, se intercambiará energía cinética con trabajo de las fuerzas interiores y la energía cinética no tiene porqué conservarse.