Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

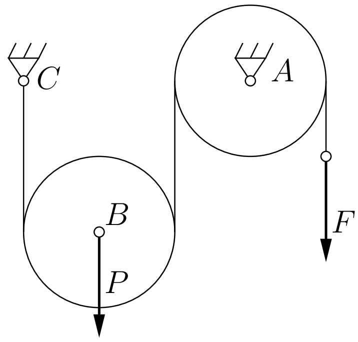
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar el principio de los trabajos virtuales para un sistema mecánico general. *Aplicar* dicho principio para calcular la fuerza F para el equilibrio del sistema de la figura, en donde el eje de la polea A está fijo, y la B soporta una carga P, mediante un cable sin peso e inextensible anclado en C. (las poleas son lisas y sin peso.) (5 ptos.)



El enunciado del principio de los trabajos virtuales es:

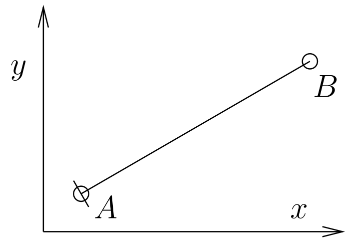
> *«En un sistema material sometido a enlaces lisos (en los que las fuerzas de enlace no desarrollan trabajo), es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:*

$$\boxed{\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.»}} \tag{1}$$

En el caso práctico propuesto, el sistema tiene un sólo grado de libertad, siendo el desplazamiento virtual que consideraremos un ascenso δx de la polea B. Al ser inextensible el cable, el desplazamiento compatible en el extremo donde se aplica F es $2\delta x$ hacia abajo. Aplicando la ecuación (1):

$$0 = \delta W = -P\delta x + 2F\delta x \quad \forall \delta x \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{P}{2}.}$$

Definir el carácter holónomo o anholónomo de las ecuaciones de ligadura en un sistema mecánico general. *Aplicar* a la varilla AB de la figura, que se mueve dentro de un plano, con el punto A apoyado en el mismo mediante un pequeño patín que impide el movimiento de dicho punto en la propia dirección de la varilla, *expresando* las ecuaciones de ligadura y los grados de libertad del movimiento. Considerando las ecuaciones de enlace que resultan, *razonar* cuál sería el procedimiento de solución más adecuado mediante la dinámica analítica, estableciendo las ecuaciones generales que se aplicarían. (5 ptos.)



Una ligadura o enlace se consideran holónoma cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas y el tiempo exclusivamente: $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0$.

Los enlaces anholónomos son en general todos aquellos que no son holónomos, no pudiendo expresarse mediante ecuaciones del tipo anterior. El caso más usual de enlace anholónomo es aquél que depende también de las velocidades, mediante relaciones del tipo: $\Phi(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = 0$.

En el ejemplo propuesto, en principio las coordenadas para describir la configuración del sistema serían 4, las coordenadas cartesianas de los dos extremos, (x_A, y_A, x_B, y_B). Están sujetas a dos enlaces: la longitud fija de la varilla rígida, y la velocidad de A perpendicular a la varilla, por lo que el número de grados de libertad es $4 - 2 = 2$:

$$\begin{cases} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 & \text{(holónomo);} \\ \dot{x}_A(x_B - x_A) + \dot{y}_A(y_B - y_A) = 0 & \text{(anholónomo).} \end{cases} \tag{2}$$

El procedimiento más adecuado de solución mediante la dinámica analítica consiste en primer lugar en eliminar los enlaces holónomos reduciendo el número de coordenadas, cosa que siempre es posible. Esto lo podemos conseguir tomando las coordenadas generalizadas (x_A, y_A, φ), siendo φ el ángulo que forma la varilla con el eje x. La ligadura anholónoma persiste con estas coordenadas, expresándose como

$$\dot{x}_A \cos\varphi + \dot{y}_A \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{3}$$

Al no poderse establecer un conjunto de coordenadas libres, no se pueden aplicar directamente las ecuaciones de Lagrange. Estas deben escribirse en un caso general en función de los desplazamientos virtuales compatibles como:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \delta q_j \text{ compatibles.} \tag{4}$$

La dinámica del sistema con ligaduras anholónomas se plantea mediante el uso de multiplicadores de Lagrange. Consideramos un caso general de un sistema con k enlaces anholónomos $\Phi_i = A_{ij}\dot{q}_j + C_i = 0$ $(i = 1 \ldots k)$. En función de los desplazamientos virtuales compatibles se formulan como $A_{ij}\delta q_j = 0$. Combinando estas ecuaciones afectadas de unos multiplicadores λ_i con las (4), pueden eliminarse los desplazamientos virtuales obteniéndose finalmente las ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{ij} = 0, \qquad j = 1 \ldots, n. \tag{5}$$

Estas n ecuaciones junto con las k ecuaciones de los enlaces se emplean para resolver las n coordenadas q_j y los k multiplicadores λ_i. (En el ejemplo propuesto hay una sola ligadura, con coeficientes $A_x = \cos\varphi$, $A_y = \operatorname{sen}\varphi$, $A_\varphi = 0$, como se deduce de (3).)