Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Septiembre de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

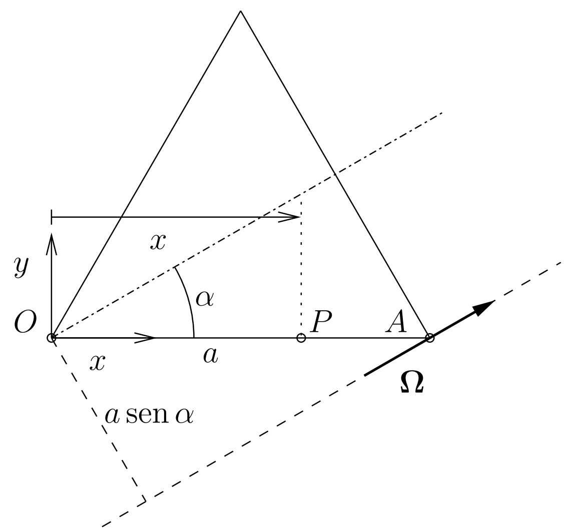
Un cono de semiángulo en el vértice α, rueda y desliza sobre un plano fijo, de modo que la proyección del eje del cono sobre el plano se traslada con velocidad constante v_0, perpendicular a la misma a lo largo del movimiento. En todo instante, el punto del cono en contacto con el plano y situado a una distancia a del vértice no desliza. Determinar:

1. Velocidad angular de pivotamiento y rodadura.
2. Describir el movimiento, definiendo el eje instantáneo del movimiento helicoidal tangente y velocidad mínima.
3. Velocidad y aceleración de un punto del cono en contacto con el plano situado a una distancia x del vértice.

⋆

1.— Del enunciado se deduce inmediatamente que el eje del cono a lo largo del movimiento desarrolla también una traslación de velocidad v_0 constante, perpendicular al mismo; por tanto el movimiento será una rotación, con velocidad angular paralela a dicho eje. Por otra parte sabemos que el punto A (ver figura, en la que se representa una sección del cilindro por su eje y normal al plano) tiene velocidad nula, por lo que el eje instantáneo de rotación pasa en todo instante por dicho punto, es decir, a una distancia $a\operatorname{sen}\alpha$ del vértice O del cono. La velocidad angular es por tanto

$$\Omega = \frac{v_0}{a\operatorname{sen}\alpha}. \qquad (1)$$



Vectorialmente, con los ejes de la figura, la expresión es

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{v_0}{a\operatorname{sen}\alpha}(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j}). \qquad (2)$$

Las componentes de pivotamiento y rodadura son precisamente las componentes según y e x respectivamente:

$$\Omega_{\text{piv}} = \Omega_y = \frac{v_0}{a}; \quad \Omega_{\text{rod}} = \Omega_x = \frac{v_0}{a\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

2.— El movimiento, como se ha dicho, es una rotación instantánea (velocidad mínima nula). El eje de rotación se traslada paralelamente al eje del cono, describiendo un plano a lo largo del movimiento (axoide fijo). En una referencia ligada al cono, el eje de rotación describe un cilindro coaxial con el cono y de radio $a \operatorname{sen} \alpha$ (axoide móvil).

3.— La velocidad del punto P de la figura es

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AP} = \frac{v_0}{a}(a - x). \tag{4}$$

La aceleración vale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_P &= \underbrace{\boldsymbol{a}_O}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}}}_{=\mathbf{0}} \wedge \boldsymbol{r}_{OP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{OP}) \\ &= \Omega^2 x \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \alpha\, \boldsymbol{i} + \cos \alpha\, \boldsymbol{j}). = \frac{v_0^2}{a^2} x(-\boldsymbol{i} + \operatorname{cotg} \alpha\, \boldsymbol{j}). \end{aligned} \tag{5}$$