Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

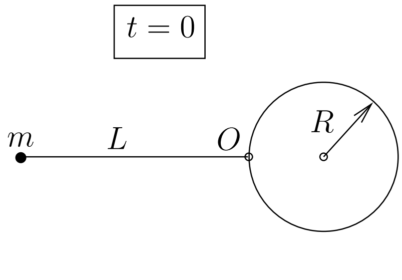
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Una partícula pesada de masa m se encuentra unida al punto O de una circunferencia fija de radio R mediante un hilo flexible e inextensible de longitud $L > \pi R$ y masa despreciable. La circunferencia se encuentra contenida en un plano vertical fijo, y el punto O se encuentra sobre un diámetro horizontal de la misma. En el instante inicial la partícula parte del reposo, con el hilo horizontal y tenso, en el mismo plano de la circunferencia. A medida que cae el hilo se enrolla sobre la circunferencia. Se pide:



1. Ecuaciones del movimiento en función del o de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Expresión de la tensión del hilo en función del o de los grados de libertad y sus derivadas;
3. Determinar razonadamente la configuración del sistema en el momento en que el hilo se destensa.

⋆

1. El movimiento se desarrolla en dos fases.

- Fase 1. Movimiento pendular alrededor del punto fijo O. Denotando por $\varphi(t)$ el único grado de libertad existente, representado por el ángulo que forma el hilo con la horizontal, la ecuación dinámica se expresa como:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{L}\cos\varphi = 0 \ , \qquad \varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0 \ ,$$

que es válida para todo instante t que verifique $0 \leq \varphi(t) \leq \pi/2$.

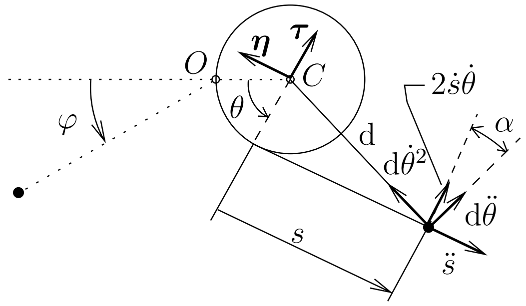


Figura 1: *Configuraciones genéricas en las dos fases del movimiento*

- Fase 2. A partir de $\varphi = \pi/2$ el hilo comienza a enrollarse en la circunferencia, lo que introduce una restricción cinemática diferente y obliga a replantear las ecuaciones del movimiento. De nuevo el sistema tiene un único grado de libertad, representado en este caso por el ángulo θ que situa el punto de despegue del hilo respecto de la horizontal. La distancia entre el punto de despegue y la partícula se denota por s y se relaciona con θ a través de la expresión:

$$s = L - R\theta \tag{1}$$

Una de las formas más sencillas de describir la evolución del sistema es plantear la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección perpendicular al hilo. Esto se debe a que el hilo es de masa despreciable, y por tanto la acción que ejerce sobre la partícula lleva la propia dirección del hilo.

Para obtener la aceleración de la partícula haremos uso de un sistema de referencia auxiliar $(C; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$, de forma que $\boldsymbol{\eta}$ lleva en todo momento la dirección del hilo despegado (y por tanto paralelo a la tangente a la circunferencia en el punto de despegue) y $\boldsymbol{\tau}$ es perpendicular a éste, tal y como muestra la Figura 1. Este sistema de referencia gira alrededor de C con velocidad angular $\dot{\theta}$, resultando:

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = -\ddot{s}\boldsymbol{\eta}\,, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{arr}} = (\mathrm{d}\ddot{\theta}\cos\alpha + \mathrm{d}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\alpha)\boldsymbol{\tau} + (\mathrm{d}\dot{\theta}^2\cos\alpha - \mathrm{d}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\alpha)\boldsymbol{\eta}\,, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\dot{s}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

siendo α el ángulo que forma el hilo con el segmento que une el centro C de la circunferencia con la partícula (ver Figura 1). Otra forma de obtener la expresión de esta aceleración es derivar dos veces directamente las componentes cartesianas del vector posición de la partícula, aunque este procedimiento es mucho más laborioso.

Por otro lado, las fuerzas aplicadas sobre la partícula son la tensión del hilo $\boldsymbol{T}_2 = T_2\boldsymbol{\eta}$ y el peso $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = -mg(\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{\tau} + \cos\theta\boldsymbol{\eta}) \tag{3}$$

Teniendo en cuenta las relaciones $\operatorname{sen}\alpha = R/\mathrm{d}$, $\cos\alpha = s/\mathrm{d}$ y la relación entre s y θ dada en (1), el principio de la cantidad de movimiento según $\boldsymbol{\tau}$ proporciona la ecuación de segundo orden del movimiento pedida en el enunciado:

$$\boxed{(L - R\theta)\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 = -g\operatorname{sen}\theta} \tag{4}$$

2. En las dos fases del movimiento, la tensión se obtiene planteando la ecuación de cantidad de movimiento según el propio hilo. De esta forma la tensión en la primera fase (T_1) resulta

$$T_1 = mL\dot{\varphi}^2 + mg\operatorname{sen}\varphi \qquad (0 \leq \varphi(t) \leq \pi/2) \tag{5}$$

La tensión en la segunda fase ($\boldsymbol{T}_2 = T_2\boldsymbol{\eta}$) se obtiene a partir de la ecuación de cantidad de movimiento según $\boldsymbol{\eta}$ haciendo uso de las expresiones (2) y (3), resultando:

$$T_2 = m(L - R\theta)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \tag{6}$$

3. En la primera fase del movimiento el hilo no se destensa, ya que los dos términos de la expresión (5) son positivos para $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

En la segunda fase, la expresión (6) nos indica que el hilo puede destensarse para $\theta \geq \pi/2$. Para determinar con precisión la configuración en que se produce, es necesario relacionar la tensión T_2 con el ángulo θ, eliminando el término en $\dot{\theta}$ de la expresión (6). Para ello, se hace uso de la conservación de la energía entre el instante inicial y una posición genérica. Tomando como origen del potencial gravitatorio la horizontal que pasa por el centro de la circunferencia, se obtiene:

$$E = cte = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\,(L - R\theta)^2 - mg\,[R\operatorname{sen}\theta + (L - R\theta)\cos\theta] = 0 \tag{7}$$

Despejando $\dot{\theta}^2$ en (7) y sustituyéndola en (6) se obtiene la relación:

$$T_2(\theta) = mg\left(\frac{2R\operatorname{sen}\theta}{L - R\theta} + 3\cos\theta\right) \tag{8}$$

Por tanto, la configuración en que el hilo se destensa es aquella en la que se verifica:

$$T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = -\frac{3}{2}\left(\frac{L}{R} - \theta\right) \tag{9}$$

La ecuación (8) indica que el hilo está tenso (es decir, $T_2 > 0$) para $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$, puesto que todos los términos son positivos en este intervalo. Como además $T_2 < 0$ para $(\pi < \theta < 3\pi/2)$ y la función $T_2(\theta)$ es continua en θ, se deduce que en algún punto del intervalo $(\pi/2 < \theta < \pi)$ la tensión se anula.

Este razonamiento puede también ilustrarse con la ayuda de la Figura 2, en la que se ha representado el cálculo de la raíz de la ecuación (9), y en la que se ha tenido en cuenta que $(L/R) > \pi$.

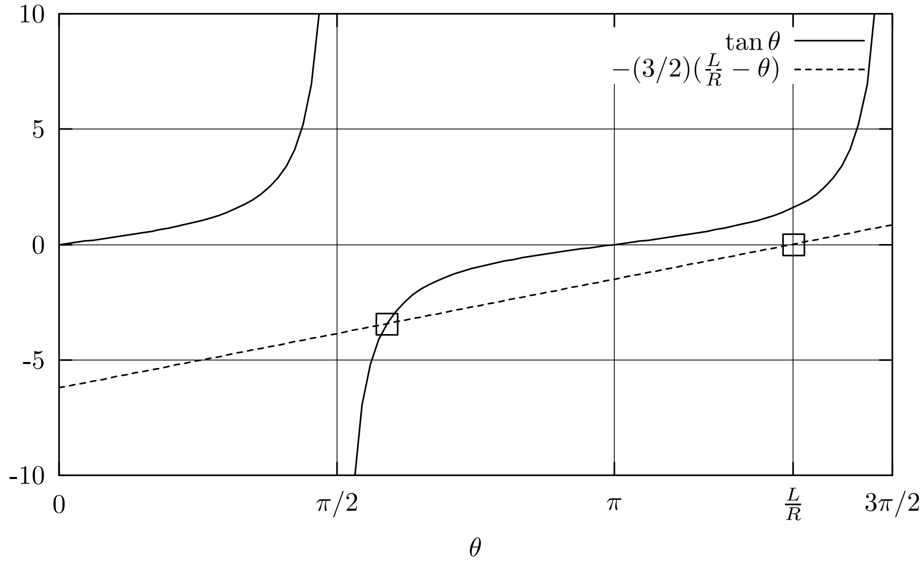


Figura 2: *Raíz de la ecuación* $\tan\theta = -\frac{3}{2}\left(\frac{L}{R} - \theta\right)$

En conclusión, el ángulo θ_d en que el hilo se destensa verifica la ecuación (9) y es tal que $\pi/2 < \theta_\mathrm{d} < \pi$.