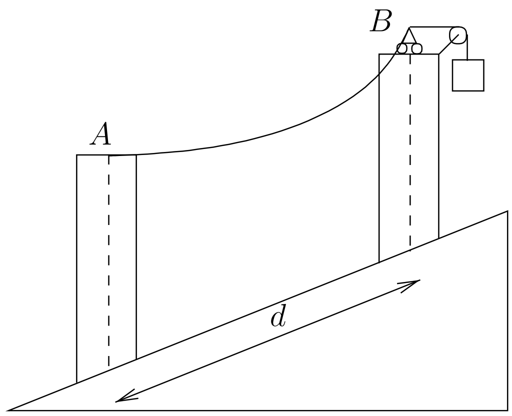
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Septiembre de 2001)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 6.º Tiempo: 60 min.

Un hilo flexible de peso unitario $q = 8$ N/m tiene sus extremos A y B sobre sendos postes verticales de altura $h = 5$ m y separados una distancia $d = 10$ m, que están situados sobre un plano inclinado cuya pendiente es del 40 %. Del extremo más alto del hilo cuelga un contrapeso que introduce una tensión horizontal de 100 N. Se pide calcular la mínima distancia del hilo al plano inclinado.



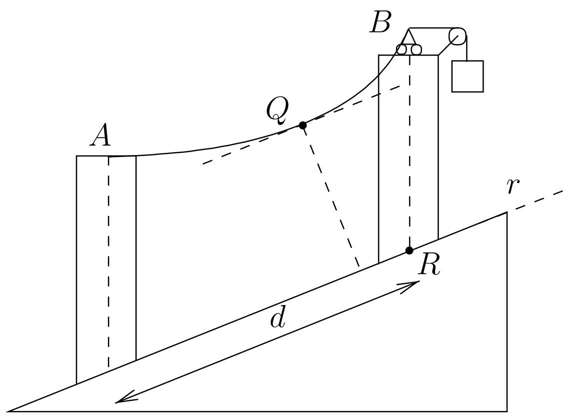
El cable forma una catenaria cuyo parámetro se obtiene de forma directa mediante:

$$a = \frac{T_0}{q} = 12{,}5 \text{ m.} \qquad (1)$$

Imponiendo con la ecuación de la catenaria la diferencia de ordenadas entre A y B:

$$a \cosh \frac{x_B}{a} - a \cosh \frac{x_A}{a} = d \operatorname{sen} \theta \qquad (2)$$

Siendo (x_B, x_A) las abcisas de los anclajes del hilo medidas según la horizontal, y $\theta = \arctan 0{,}4 = 21{,}801°$.



La diferencia de abcisas de los puntos A y B también se obtiene a partir de los datos del enunciado:

$$x_B - x_A = d \cos \theta = 9{,}285 \text{ m.} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene una ecuación en x_A:

$$12{,}5 \cosh(0{,}08 x_A + 0{,}743) - 12{,}5 \cosh(0{,}08 x_A) = 3{,}714 \qquad (4)$$

cuya solución es:

$$x_A = 0{,}128 \text{ m.} \qquad (5)$$

El punto Q de la catenaria (ver figura) es aquel cuya distancia al plano inclinado es mínima. La abcisa de este punto se obtiene despejando en:

$$\tan \theta = \operatorname{senh} \frac{x_Q}{a} \qquad (6)$$

y resulta:

$$x_Q = a \operatorname{argsenh}(\tan \theta) = 4{,}875 \text{ m.}; \qquad y_Q = a \cosh \frac{x_Q}{a} = 13{,}463 \text{ m.} \qquad (7)$$

La mínima distancia buscada corresponde a la distancia del punto Q a la recta r de la figura. Por razonamientos de geometría analítica elemental, resulta:

$$d_{\min}^2 = \frac{(y_R - x_R \tan\theta - (y_Q - x_Q \tan\theta))^2}{1 + \tan^2\theta} \tag{8}$$

donde (x_R, y_R) son las coordenadas del punto R:

$$x_R = x_B = 9{,}413 \text{ m.} \tag{9}$$

$$y_R = y_B - h = 11{,}215 \text{ m.} \tag{10}$$

Sustituyendo en (8) se obtiene finalmente:

$$d_{\min} = 3{,}773 \text{ m.} \tag{11}$$

NOTA: La ecuación (4) se puede resolver analíticamente aplicando las relaciones:

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$1 = \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x$$