Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

1.er EXAMEN PARCIAL (24 de Noviembre de 2001)

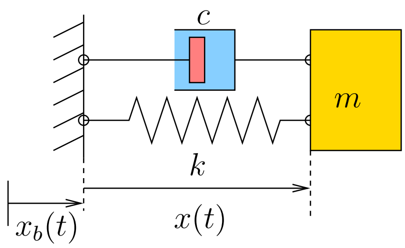
| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 1.º* (puntuación: 5/25) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto* en la hoja. La respuesta habrá de ser breve y directa. Deberán justificarse razonadamente todos los pasos. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

---

*Definir* el concepto de resonancia para un sistema dinámico lineal con un grado de libertad, formado por una masa $m$ unida mediante un resorte de constante $k$ y un amortiguador viscoso de constante $c$ a una base fija, sometido a una fuerza de excitación periódica. *Aplicar* al caso particular en que la excitación se produce por un movimiento impuesto en la base de tipo armónico (definido por la expresión $x_b(t) = A\,\mathrm{sen}(\Omega t)$), obteniendo: 1) ecuación diferencial del movimiento; 2) frecuencia de resonancia; 3) amplitud máxima resonante.
(5 ptos.)




Para un sistema sometido a una excitación periódica, se define como *resonancia* las condiciones de dicha excitación por las que la respuesta del sistema es máxima.

**1.—** El desplazamiento (absoluto) de la masa es suma del movimiento impuesto y la propia elongación del muelle, $X = x_b + x$, lo que debe ser tenido en cuenta para expresar la aceleración (absoluta) de la masa, $\ddot{X} = \ddot{x}_b + \ddot{x}$. Sin embargo, las fuerzas elástica y de resistencia viscosa del resorte son proporcionales únicamente a su elongación $(-kx)$ y a la derivada de la misma $(-c\dot{x})$. La ecuación del movimiento es por tanto

$$m(\ddot{x}_b + \ddot{x}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t.}$$

**2.—** El movimiento en régimen permanente vendrá dado por una expresión del tipo $x_p(t) = B\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi)$. Para calcular las constantes $(B, \phi)$ sustituimos en la ecuación diferencial:

$$-mB\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi) + cB\Omega\cos(\Omega t + \phi) + kB\,\mathrm{sen}(\Omega t + \phi) = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t,$$

y particularizamos en dos instantes,

a) para $t = 0$: $$-mB\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\phi + cB\Omega\cos\phi + kB\,\mathrm{sen}\,\phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k}$$

b) para $\Omega t + \phi = 0$: $$cB\Omega = mA\Omega^2\,\mathrm{sen}(-\phi) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{mA\Omega\,\mathrm{sen}\,\phi}{c}$$

Eliminando $(\phi, B)$ entre estas dos ecuaciones:

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\phi}} = \frac{c\Omega}{\sqrt{(m\Omega^2 - k)^2 + (c\Omega)^2}}; \quad B = -\frac{A\Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}. \tag{1}$$

(Donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\xi = c/(2\sqrt{km})$.) La resonancia se obtiene para el máximo de la amplitud:

$$0 = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2A\Omega\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\Omega^2} - A\Omega^2\frac{2(\Omega^2-\omega_0^2)(2\Omega)+8\xi^2\omega_0^2\Omega}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}$$

Simplificando, se obtiene finalmente la frecuencia de resonancia:

$$\boxed{\Omega_{\mathrm{res}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\xi^2}}.}$$

**3.—** Sustituyendo para la frecuencia de resonancia en la expresión de la amplitud (1), resulta la amplitud máxima resonante:

$$\boxed{B_{\max} = \frac{A}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.}$$